JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Es sei $A = D - L - R$ eine Matrix mit positiven Diagonalelementen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, und $\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2} = I - \tilde{L} - \tilde{R}$ die zugehörige skalierte Matrix mit Diagonalelementen $\tilde{a}_{ii} = 1$. Man zeige, dass die Spektren des Jacobi-Verfahrens (H_J) und SOR-Methode (H_{SOR}) durch die Skalierung nicht beeinflusst werden, so dass gelten

$$\sigma(H_J) = \sigma(\tilde{H}_J), \quad \sigma(H_{SOR}(\omega)) = \sigma(\tilde{H}_{SOR}(\omega)).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix} \text{ mit } t \in (0.5, 1).$$

Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren divergiert und das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Sei A symmetrisch. Das *symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren* ist definiert durch

$$P = (D - R^T)D^{-1}(D - R) \text{ und } N = R^T D^{-1} R.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine Cholesky-Zerlegung $P = LL^T$ von P gibt und geben Sie L an.

(b) Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \ 0 \le b < 1, \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}.$$

gilt:

$$\mathrm{cond}_2(L^{-1}AL^{-T}) \le \mathrm{cond}_2(A),$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, falls $A = I = L$ ist.

Abgabe: Dienstag, 11.06.2013, bis 12:15 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 7 19.6.12

1.1 Aufgabe 1

Für die Matrizen des Jacobi– und des SOr–Verfahrens gilt:

$$A = D - L - R$$

$$H_J = D^{-1}(L+R) \qquad H_{SOR} = (D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega r)$$

sowie f.d. skalierte Matrix $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = I - \tilde{L} - \tilde{R}$$

$$\tilde{H}_J = (\tilde{L} + \tilde{R}) \qquad \tilde{H}_{Sor} = (I - \omega\tilde{L})^{-1}((1-\omega)I + \omega\tilde{R})$$

mit $\tilde{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2}$ *und* $\tilde{R} = D^{-1/2}RD^{-1/2}$

1. Jacobi

$$\begin{aligned}
\det(H_j - \lambda I) &= \det(D^{-1}(L+R) - \lambda I) \\
&= \det(D^{-1/2}D^{-1/2}(L+R)D^{-1/2}D^{1/2} - D^{-1/2}D^{1/2}\lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\
&= \det(D^{-1/2})\det(D^{-1/2}(L+R)D^{-1/2} - D^{-1/2}\lambda D^{-1/2})\det(D^{1/2}) \\
&= \det(I(\tilde{L}+\tilde{R}) - \lambda I) \\
&= \det(\tilde{H}_j - \lambda I)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma 8 H_j) = \sigma(\tilde{H}_j)$$

2. SOR Sei $\lambda \in \sigma(\tilde{H}_{SOR})$. Dann gibt es $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned}
\det(H_{SOR} - \lambda I) &= \det((D-\omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega R) - \lambda I) \\
&= \det((D^{1/2}D^{1/2} - \omega D^{1/2}\tilde{L}D^{1/2})^{-1}((1-\omega)D^{1/2}d^{1/2} \\
&\qquad + \omega D^{1/2}\tilde{R}D^{1/2}) - \lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\
&= \det(D^{-1/2}(I-\omega\tilde{L})^{-1}D^{-1/2}D^{1/2}((1-\omega)I + \omega\tilde{R})D^{1/2} - \lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\
&= \det(D^{-1/2})\det((I-\omega\tilde{L})^{-1}((1-\omega)I + \omega\tilde{R}) - \lambda I)\det(D^{1/2})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma(H_{SOR}) = \sigma(\tilde{H}_{SOR})$$

1.2 Aufgabe 2

Zeige Divergenz des Jacobi–Verfahrens, indem wir zeigen $\varrho(B) \geq 1$. Mit Matrix A ergibt sich:

$$B = H = -\begin{bmatrix} 0 & t & t \\ t & 0 & t \\ t & t & 0 \end{bmatrix}$$

$\chi(B) = -\lambda(\lambda^2 - t^2) + 2t(t\lambda - t^2) = -(t - \lambda^2)(2t + \lambda)$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = t \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} \leq t$ und $\lambda_3 = -2t \quad \Rightarrow |\lambda_3| \geq 1$

$\Rightarrow \varrho(B) \geq 1$

Zeige konv. von Gauß–Seidel mit $\varrho(\tilde{L}) < 1$

$$D - L_0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ t & 1 & \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (D - L_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -t & 1 & \\ t^2 - t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} = H = (D - L_0)^{-1} R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -t & 1 & \\ t^2 - t & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ & 0 & -t \\ & & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & t^2 & t^2 - t \\ 0 & -t^3 + t^2 & -t^3 + t^2 \end{pmatrix}$$

$\chi(H) = ... = -\lambda(\lambda^2 + \lambda(t^3 - 3t^2) + t^3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -\frac{t^3 - 3t^2}{2} + \sqrt{\frac{(t^3 - 3t^2)^2}{4} - t^3}$

$\lambda_3 = -\frac{t^3 - 3t^2}{2} - \sqrt{\frac{(t^3 - 3t^2)^2}{4} - t^3}$

Nach Voraussetzung $\frac{1}{2} < t < 1$ gilt:
$\frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3 < 0$
d.h.$\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ und es gilt:
$|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = (-\frac{t^3-3t^2}{2} + i\sqrt{\frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3})(... - i\sqrt{\ })$
$= \frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3 - \frac{(t^3-3t^2)}{4} = -t^3 < 1$

1.3 Aufgabe 3

a) Z.Z. P symm. und pos definit.

- $P^T = (D-R)^T D^{-1}(D-R^T)^T = (D-R^T)D^{-1}(D-R) = P \quad \Rightarrow \quad P$ symmetrisch
- Gilt: $x^T R^T D^{-1} R x = x R^T D^{-1/2} D^{-1/2} R x = x(D^{-1/2}R)^T(D^{-1/2}R)x > 0$
  $\Leftrightarrow D > 0$ komponentenweise
  Folgt:
  $$\begin{aligned} x^R P x &= x^T(D-R^T)D^{-1}(D-R)x \\ &= x^T(DD^{-1})x - x^T(DD^{-1}R)x - x^T R^T D^{-1} D x + x^T R^T D^{-1} R x \\ &= x^T(D-R-R^T)x + x R^T D^{-1} R x \\ &= x^T A x + x R^T D^{-1} R x > 0 \end{aligned}$$
  $\Leftrightarrow$ A pos definit.

Die Cholesky–Zerlegungs ergibt sich aus $L = (D-R^T)D^{-1/2}$
$$\begin{aligned} P &= LL^T = (D-R^T)D^{-1/2}((D-R^T)D^{-1/2})^T \\ &= (D-R^T)D^{-1/2}D^{-1/2}(D-R) \\ &= (D-R^T)D^{-1}(D-R) \end{aligned}$$

b) A symm. und damit auch $L^{-1}AL^{-T}$ d.h. es genügt nach Numerik 1, die EW von A bzw. $L^{-1}AL^{-T}$ zu betrachten, da $cond_2(A) = \frac{\min_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|}{\max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|}$
Zunächst für $L^{-1}AL^{-T}$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow L^{-1}AL^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b & -b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-b^2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \sigma(L^{-1}AL^{-T}) = \{1, 1-b^2\}$
$\Rightarrow cond_2(L^{-1}AL^{-T}) = \frac{1}{1-b^2}$

Für A folgt:
$$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -b \\ -b & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2\lambda - b^2 + 1$$
Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm b$, also:
$cond_2(A) = \frac{1+b}{1-b} = \frac{(1+b)^2}{1-b^2}$
womit Beweis folgt.