1. Klausur zu **"Höhere Mechanik", Prof. Mosel, SS 2010**

Bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt (mit Namen). Viel Erfolg!

K1. Ein ruhendes Muon hat die mittlere Lebensdauer $\tau = 2.2\,\mu$s. Durch die Höhenstrahlung werden in $h = 10\,$km Höhe über der Erdoberfläche Muonen erzeugt, die die Geschwindigkeit $v = 0.9995\,c$ besitzen. Kann ein Muon, das nach der mittleren Lebensdauer zerfällt, die Erdoberfläche erreichen? Beantworten Sie die Frage über zwei verschiedene Lösungswege:

(a) Berechnung der mittleren Lebensdauer t des Muons und des damit zurückgelegten Wegs s im System der Erde. 2P

(b) Berechnung der Entfernung h' des Entstehungsortes von der Erdoberfläche im System des Muons. 2P

HINWEIS: $c = 300\,000\,\text{km/s}$

K2. Man betrachte zwei Teilchen gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$ und entgegengesetzt gleicher elektrischer Ladung $Q_1 = -Q_2$. Zwischen ihnen wirke zum einen die Coulombkraft

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

und zum anderen eine äußere, räumlich und zeitlich konstante Gravitationskraft

$$\vec{K}_i = m_i g \vec{e}_z \quad (i = 1, 2).$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkts- und Relativkoordinate auf. 2P

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichungen, welche Komponenten des Gesamtimpules $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ erhalten sind. 1P

(c) Zerlegen Sie den Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ in einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil (L_R und L_S) und zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichungen, welche Komponenten von L_R und L_S erhalten sind. 3P

K3. Zeigen Sie, dass das Gravitationspotential einer homogenen Hohlkugel mit dem äußeren Radius b und dem inneren Radius a die Form hat

$$V(r) = m\,\phi(r) = -2\pi G m \rho \cdot \begin{cases} \frac{2}{3}(b^3 - a^3) r^{-1} & \text{für } b \le r, \\ b^2 - a^2 & \text{für } r \le a, \\ b^2 - \frac{2}{3}a^3 r^{-1} - \frac{1}{3}r^2 & \text{für } a < r < b. \end{cases}$$

HINWEIS: Wählen Sie die z–Achse so, dass die Winkelintegration möglichst einfach wird. 5P

K4. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels konstanter Massendichte ρ_0, der um die z-Achse (Symmetrieachse) rotiert und dessen Oberfläche in Zylinderkoordinaten durch folgende Gleichung (mit den Konstanten a und h) bestimmt ist: $r^2/z^2 = a^2$ für $0 < z < h$ und $r = 0$ sonst. Drücken Sie das Trägheitsmoment über die Masse des Kegels aus.

5P

K5. Ein Körper der Masse M werde oberhalb seines Schwerpunkts S an der Wand im Punkt A aufgehängt. Der Abstand Schwerpunkt-Aufhängepunkt betrage h. Das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich seines Schwerpunks sei I. Der Körper werde nun aus der Ruhelage ausgelenkt, so dass er Schwingungen der Schwingungsdauer T ausführen kann. Bestimmen Sie unter der Annahme *kleiner* Auslenkungen ϕ den Zusammenhang zwischen I und T.

HINWEIS: Leiten Sie zunächst die Bewegungsgleichung über das Drehmoment her.

5P

K6. Gegeben sei ein Trägheitstensor der Form

$$\hat{\Theta} = M \begin{pmatrix} 6a^2 & a^2 & 0 \\ a^2 & 6a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Hauptträgheitmomente und -achsen in Bezug auf den Koordinatenursprung.

5P