7 Hausaufgabe zu Theorie der höheren Mechanik zum Montag, den 7.6.2010

H13

a) $\Theta_A = 2\Theta_{Kugel} = \frac{4}{5}mr^2$

$\Theta_S = 2(\Theta_{Kugel} + m(\frac{a}{2})^2) = \frac{4}{5}mr^2 + \frac{a^2}{2}m$

Also $\Theta_3 = \Theta_A < \Theta_S = \Theta_1 = \Theta_2$, also kräftefreier symmetrischer Kreisel.

b) Da Kräftefreier Kreisel gilt:

$$\left| \begin{array}{ll} A\dot{p} + (C-A)qr & = 0 \\ A\dot{q} + (A-C)rp & = 0 \\ C\dot{r} & = 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ll} \dot{p} + \frac{C-A}{A}qr & = 0 \\ \dot{q} + \frac{A-C}{A}rp & = 0 \\ \dot{r} & = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \gamma = \frac{A-C}{A} = 1 - \frac{\frac{4}{5}mr^2}{\frac{4}{5}mr^2 + \frac{a^2}{2}m} = \frac{5a^2}{5a^2+8r^2}$$

Stabilität:

Es sei der momentane Drehvektor $\vec{\omega}$ nahe der Hantelachse $\vec{e}_3$, d.h. $\omega_3 = \omega_0 + \delta_3, \quad \omega_2 = \delta_2$ mit kleinen δ_i. Die linearisierten Kreiselgleichungen für Komponenten senkrecht zur Hantelachse lauten also $\dot{\delta}_1 + \gamma\omega_0\delta_2 = 0$ und $\dot{\delta}_2 + \gamma\omega_0\delta_1 = 0$.

Eingesetzt und zeitl. abgeleitet ergibt sich also: $\ddot{\delta}_i + \gamma^2 + \omega_0^2\delta_i = 0$, $i = 1, 2$.

Dies beschreibt eine stabile Schwingung, weswegen die stabilität des Kreisels gegeben ist.

c) $\left| \begin{array}{ll} \omega_1 & = \omega_\perp \cos(\gamma\omega_3 t + \phi) \\ \omega_2 & = \omega_\perp \sin(\gamma\omega_3 t + \phi) \\ \omega_3 & = \omega_0 \cos(\alpha) \end{array} \right|$, $\omega_0^2 = \omega_3^2 + \omega_\perp^2 \Rightarrow \omega_\perp = \omega_0 \sin(\alpha)$

$\Rightarrow$ (körperfestes System) $\vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \Theta_S\vec{\omega}_\perp + \Theta_A\omega_3\vec{e}_3 = \Theta_S(\omega - \gamma\omega\vec{e}_3)$

d) Da $\vec{L}$ in Richtung der Hantelachse negativ, liegt der momentane Drehvektor zwischen dem raumfesten Drehimpulsvektor und der Hantelachse. Hantelachse und momentaner Drehvektor beschreiben also einen Kegel der Frequenz ω_N um den Drehimpulsvektor.

$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{\Theta_S}\vec{L} + \gamma\omega_3\vec{e}_3$

$\Rightarrow \omega_N = \frac{|\vec{L}|}{\Theta_S} = \frac{1}{\Theta_S}\sqrt{\Theta_S^2\omega_\perp^2 + \Theta_A^2\omega_3^2} = \omega_0\sqrt{1 + ((1-\gamma)^2 - 1)\cos^2(\alpha)} = \omega_0\sqrt{1 + \gamma(\gamma-2)\cos^2(\alpha)}$

Für kleine Auslenkungen ist $\omega_3 \approx \omega_0, \quad \cos(\alpha) \approx 1$

$\Rightarrow \omega_N = \omega_0\sqrt{1 + \gamma(\gamma-2)} = \omega_0(1-\gamma) = \nu - \omega_0$

Die Nutationsfrequenz im Laborsystem ist einfach die Frequenz im Körperfesten System minus die Rotationsfrequenz des Körpers selbst.