2 Hausaufgabe zu Theorie der höheren Mechanik zum Montag, den 3.5.2010

2.3 H3

a) $\Delta t' = \gamma \Delta z \frac{1}{c}(\alpha - \beta) = \gamma \frac{\Delta t}{\alpha}(\alpha - \beta) = \gamma \Delta t(1 - \frac{\beta}{\alpha})$
$\Delta z' = \gamma(\Delta z - \frac{v}{c}\Delta tc) = \gamma \Delta z(1 - \alpha\beta)$

b) In zeitartigen Ereignissen gilt: $\alpha > 1$, also $\Delta t' = \gamma \Delta t(1 - \frac{\beta}{\alpha})$
$1 - \frac{\beta}{\alpha} > 0, \gamma > 0 \Rightarrow sgn(\Delta t') = sgn(\Delta t)$. Mit dem Vorzeichen der zeitlichen Abstände bleibt auch die Reihenfolge der Ereignisse gleich.
$\Delta z' = 0 = \gamma \Delta z(1 - \alpha\beta)$. Für $\Delta z \neq 0$ (hätte triviale Lösung v=0) und $\gamma \neq 0 \Rightarrow 1 = \alpha\beta \Leftrightarrow \frac{c}{v} = \alpha$
Mit $v < c, \alpha > 1$, also mit zeitartigen Ereignissen ist es immer möglich, ein System zu finden, sodass die Ereignis-Orte zusammenfallen.
Bei lichtartigen Ereignissen müsste $v = c \Rightarrow \alpha = 1$ sein, praktisch nicht machbar, theoretisch aber auch möglich.
Bei raumartigen Ereignissen muss die Richtung des zufindenden System umgekehrt werden, also $\alpha = \frac{c}{v} < 0$.
Für raumartige Ereignisse mit $0 < \alpha < 1$ müsste das System auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.

c) $\Delta t' = \gamma \Delta t(1 - \frac{\beta}{\alpha})$. Gesucht ist eine Lösung für v, sodass $\gamma(1 - \frac{\beta}{\alpha}) < 0$. Da $\gamma > 0$ muss $(1 - \frac{\beta}{\alpha}) < 0$ sein.
Also muss gelten $\frac{\frac{v}{c}}{\alpha} > 1 \Rightarrow \frac{v}{c} > \alpha$. Da $\alpha < 1$ kann zu jedem α ein v gefunden werden, sodass diese Gleichung erfüllt ist.
Damit wäre das Vorzeichen des zeitlichen Abstandes im neuen System gewechselt ($sgn(\Delta t') = -sgn(\Delta t)$) und die zeitliche Reihenfolge wäre umgekehrt.

2.4

a) $\begin{pmatrix} 3, 3, 2, 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4, -1, -2, -3 \end{pmatrix} = -4$

b) $\gamma = \frac{5}{3},\ \beta = -0.8,\ M = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$c^\mu = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d^\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Mc^\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Md^\mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Me^\mu = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zeitliche Reihenfolge ändert sich bei raumartig zusammenhängenden Ereignissen, bleibt aber gleich bei licht- und zeitartigen Ereignissen.
Die hier im alten System bestehende zeitliche Reihenfolge $d^\mu - e^\mu - c^\mu$ hat sich nun in die Reihenfolge $c'^\mu d'^\mu - e'^\mu$ geändert.
Dies kommt daher, dass
1. die Ereignisse c^μ und d'^μ raumartig zusammenhängen ($\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{2}{-4} = -0.5 < 1$) und
2. die Ereignisse c^μ und e'^μ raumartig zusammenhängen ($\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{1}{-5} < 1$) und
3. die Ereignisse d^μ und e'^μ lichtartig zusammenhängen ($\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{1}{1} = 1$).
Dadurch ändert sich die Reihenfolge $d^\mu - c^\mu$ in $c'^\mu - d'^\mu$ und $e^\mu - c^\mu$ in $c'^\mu - e'^\mu$, wobei $d^\mu - e^\mu = d'^\mu - e'^\mu$ erhalten bleibt.