H13] geänderte Notation:
$\omega_1 = p \quad \omega_2 = q \quad \omega_3 = r$

a) Trägheitsmoment um die Hantelachse: $\Theta_A = 2\Theta_{\text{Kugel}} = \frac{4}{5}mr^2$. Trägheitsmomente um zwei Achsen in der Ebene senkrecht dazu: $\Theta_S = \Theta_A + \frac{1}{2}ma^2$ (Steiner). Man findet also $\Theta_3 = \Theta_A < \Theta_S = \Theta_1 = \Theta_2$, d.h. es handelt sich um einen symmetrischen Kreisel.

b) Die kräftefreien Eulerschen Kreiselgleichungen lauten $\Theta_1\dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3 = 0$ und zyklische Permutationen. Man findet also

$$\dot{\omega}_1 - \gamma\omega_2\omega_3 = 0, \qquad \dot{\omega}_2 + \gamma\omega_3\omega_1 = 0, \qquad \dot{\omega}_3 = 0, \tag{5}$$

mit

$$\gamma = 1 - \frac{\Theta_A}{\Theta_S} = \left(1 + \frac{8}{5}\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1}.$$

Stabilitätsanalyse: Es sei der momentane Drehvektor $\vec{\omega}$ nahe der Hantelachse $\hat{e}_3$, d.h. $\omega_3 = \omega_0 + \delta_3$, $\omega_1 = \delta_1$, $\omega_2 = \delta_2$ mit kleinen δ_i. Die linearisierten Kreiselgleichungen für die Komponenten senkrecht zur Hantelachse lauten also:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 - \gamma\omega_0\delta_2 &= 0 \\ \dot{\delta}_2 + \gamma\omega_0\delta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Die Zeitableitung der einen eingesetzt in die jeweils andere Gleichung ergibt

$$\ddot{\delta}_i + \gamma^2\omega_0^2\delta_i = 0, \qquad i = 1, 2$$

und beschreibt somit eine stabile Schwingung mit $\nu = \gamma\omega_0$.

c) Die allgemeine Lösung von (5) ist $\omega_3 = cst = \omega_0 \cos\alpha$, und

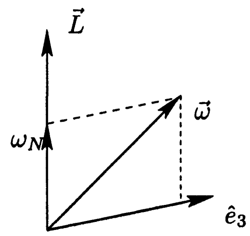
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\perp \cos(\gamma\omega_3 t + \phi) \qquad (6) \\ \omega_2 &= \omega_\perp \sin(\gamma\omega_3 t + \phi) \qquad (7) \end{aligned}$$

mit $\omega_0^2 = \omega_3^2 + \omega_\perp^2$, d.h. $\omega_\perp = \omega_0 \sin\alpha$.
Dann gilt im körperfesten System

$$\vec{L} = \underline{\Theta}\vec{\omega} = \Theta_S\vec{\omega}_\perp + \Theta_A\omega_3\hat{e}_3 = \Theta_S(\omega - \gamma\omega_3\hat{e}_3) \tag{8}$$

nach Definition von γ.

d) In der Zerlegung (8) ist der Koeffizient von $\vec{L}$ in Richtung der Hantelachse $\hat{e}_3$ negativ, da $\gamma > 0$, d.h. im Laborsystem liegt der momentane Drehvektor zwischen dem raumfesten Drehimpulsvektor und der Hantelachse (s. Skizze). Hantelachse und momentaner Drehvektor beschreiben also einen Kegel mit der Frequenz ω_N um den Drehimpulsvektor. Aus (8) folgt



$$\vec{\omega} = \frac{1}{\Theta_S}\vec{L} + \gamma\omega_3\hat{e}_3 \, .$$

Nun ist jedoch die Nutationsfrequenz gleich der Projektion von $\vec{\omega}$ auf $\vec{L}$ entlang $\hat{e}_3$ und somit

$$\begin{aligned} \omega_N &= \frac{|\vec{L}|}{\Theta_S} = \frac{1}{\Theta_S}\sqrt{\Theta_S^2\omega_\perp^2 + \Theta_A^2\omega_3^2} \\ &= \omega_0\sqrt{1 + ((1-\gamma)^2 - 1)\cos^2\alpha} \\ &= \omega_0\sqrt{1 + \gamma(\gamma - 2)\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

Bei kleiner Auslenkung aus der Hantelachse ist $\omega_3 \approx \omega_0$ bzw. $\cos\alpha \approx 1$, und man findet

$$\omega_N = \omega_0\sqrt{1 + \gamma(\gamma - 2)} = \omega_0(1 - \gamma) = \nu - \omega_0$$

Im Klartext: die Nutationsfrequenz im Laborsystem ist einfach die Frequenz im körperfesten System minus die Roationsfrequenz des Körpers selbst.