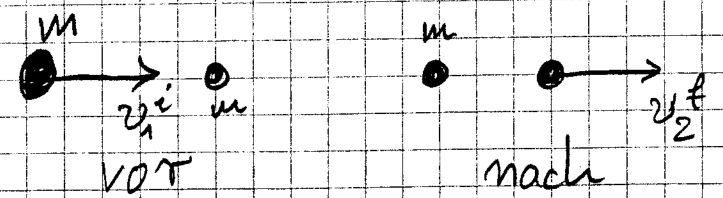
K1 (a) elastischer und zentraler Stoß zweier Teilchen gleicher Masse m:



* Da es sich um einen zentralen Stoß handelt, findet der Prozeß in einer Dimension statt. Außerdem gilt $v_1^f < v_2^f$.
* Elastischer Stoß $\Rightarrow$ Impuls- und Energieerhaltung:

(*) Impulserhaltung: $\boxed{v_1^i = v_1^f + v_2^f}$ (1)

(*) Energieerhaltung: $\frac{m}{2}(v_1^i)^2 = \frac{m}{2}(v_1^f)^2 + \frac{m}{2}(v_2^f)^2$

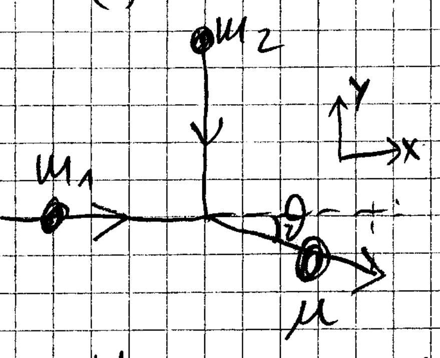
$$\Rightarrow \boxed{(v_1^i)^2 = (v_1^f)^2 + (v_2^f)^2} \quad (2)$$

Quadrieren von Glg. (1) und Vergleich mit (2) ergibt:

$\boxed{v_1^f \cdot v_2^f = 0} \Rightarrow v_1^f = 0 \wedge v_2^f = v^i$ oder umgekehrt.

Da $v_1^f < v_2^f \Rightarrow \boxed{v_1^f = 0 \text{ und } v_2^f = v_1^i}$

(b) vollst. inelastisch: Es entsteht (nach dem Stoß) ein Körper der Masse $M = m_1 + m_2$; es gilt nur die Impulserhaltung, also keine Energieerhaltung.



Impulserhaltung in x- & y-Richtung:

x-Richtung: $m_1 v_1 = M v \cos\vartheta \Rightarrow m_1^2 v_1^2 = M^2 v^2 \cos^2\vartheta$

y-Richtung: $m_2 v_2 = M v \sin\vartheta \Rightarrow m_2^2 v_2^2 = M^2 v^2 \sin^2\vartheta$ $\Rightarrow$

Mit $\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}}$$

K2 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, $K_1 = q_1 E(t) \vec{e}_z \overset{!}{=} -K_2$, da $q_1 = -q_2$

(a) Bewegungsglg. der beiden Teilchen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{K}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= F_{21} + K_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 ,$$

da $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ und $q_1 = -q_2$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt: $\boxed{\ddot{\vec{R}} = 0}$ $\rightarrow$ Gesamtimpuls $\vec{P}$ ist erhalten

Bewegungsglg. der Relativbewegung ($\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$):

$$\boxed{m \ddot{\vec{r}} = 2 q_1 E(t) \vec{e}_z + 2 \vec{F}_{21}}$$

(b) $\vec{L}_r = \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$; $\vec{L}_s = M (\vec{R} \times \dot{\vec{R}})$

μ: reduzierte Masse

M: Gesamtmasse

$\boxed{\dot{\vec{L}}_S = M (\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}) = 0}$, da $\ddot{\vec{R}} = 0$ (siehe Teil (a))

$$\dot{\vec{L}}_r = \frac{m}{2} (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bewegungsglg. aus} \\ \text{Teil (a)}}}{=} \vec{r} \times (q_1 E \vec{e}_z + \underset{\substack{\uparrow \\ \sim \frac{\vec{r}}{r^3}}}{\vec{F}_{21}}) = q_1 E (\vec{r} \times \vec{e}_z)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\vec{L}}_r = q_1 E (r_y, -r_z, 0)}$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_s$ ist erhalten

$\vec{L}_r$ ist nur die z-Komponente erhalten

(K3) Anwendung der Impulserhaltung (horizontale Bewegung):

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

$\Rightarrow$ $50t \cdot 1 \frac{m}{s} = 60t \cdot v_2 \frac{m}{s}$

$\Rightarrow$ $\boxed{v_2 = \frac{5}{6} \frac{m}{s}}$: die neue Geschwindigkeit (nach der Beladung).

Änderung der kinetischen Energie:

vorher: $\frac{1}{2} 50t \left(1 \frac{m}{s}\right)^2$

$\Rightarrow$ $\frac{E^{kin}_{nachher}}{E^{kin}_{vorher}} = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$

nachher: $\frac{1}{2} 60 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$\Rightarrow$ Die kin. Energie hat sich um den Faktor $\frac{5}{6}$ verringert!

K4)

Teilchen ruht!

<u>Impulserhaltung:</u> $0 = \vec{p} + \vec{p}\,'$

$\Rightarrow \vec{p} = -\vec{p}\,' \Rightarrow$ 1-dimensionales Problem

Wähle Koordinatenachse in Richtung von $\vec{p}$

$\Rightarrow \quad m \cdot v = -m' \cdot v' \quad \mathrm{I}$

<u>Energiebilanz:</u>

Laut Aufgabenstellung: $W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 \quad \underline{\mathrm{II}}$

<u>I in II</u>

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m' \cdot \left(-\frac{mv}{m'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}v^2\left(m + \cancel{m'} \cdot \frac{m^2}{m'^{\cancel{2}}}\right) \quad \Big| \cdot 2 \quad \Big| : \left(m + \frac{m^2}{m'}\right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2W}{m + \frac{m^2}{m'}} \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{v = \pm\sqrt{\frac{2W}{m\left(1 + \frac{m}{m'}\right)}}}} \quad (2 \text{ Lösungen!})$$

Die beiden Teilchen fliegen also in entgegengesetzte Richtungen

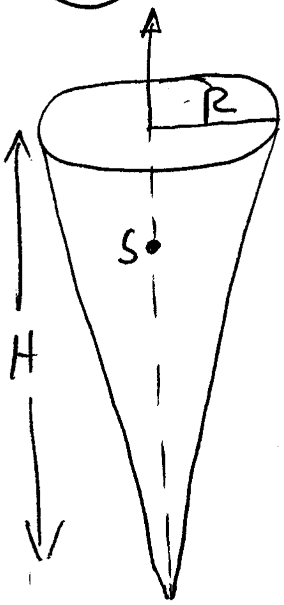
<u>Für v' folgt mit I:</u>

$$v' = -\frac{m \cdot v}{m'} = -\frac{m}{m'} \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{2W}{m\left(1+\frac{m}{m'}\right)}}\right)$$

$$\underline{\underline{v'}} = \mp\sqrt{\frac{2Wm^{2}}{\cancel{m}\left(m'^2 + m \cdot \frac{m'^{2}}{m'}\right)}} = \mp\sqrt{\frac{2Wm}{m'(m'+m)}}$$

K5

Schwerpunkt: $\vec{R} = \dfrac{\rho \int_V \vec{r}\, dV}{\rho \int_V dV}$



$$\underline{\underline{\int \vec{r}\, dV}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zylinder-} \\ \text{koord.}}}{=} \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} \int_{0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi z \end{pmatrix} r\, dr\, dz =$$

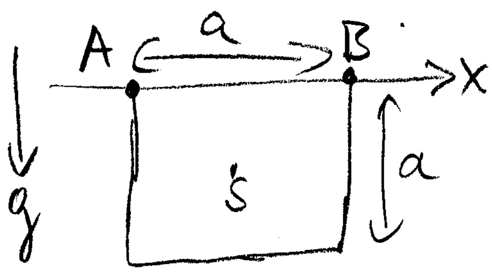
$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \int_{z=0}^{H} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^3 \end{pmatrix} dz = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R^2\pi}{4} H^2 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\int_V dV}} = \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} \int_{0}^{2\pi} r\, dr\, d\varphi\, dz = \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} 2\pi r\, dr\, dz =$$

$$= \pi \int_{z=0}^{H} \left(\frac{zR}{H} \right)^2 dz = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} H R^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_S \end{pmatrix}}} \text{ mit } \underline{\underline{z_S = \frac{3}{4} H}}}$$

(K6) o.B.d.A. sei x die Richtung, um die die Platte drehbar aufgehängt wird. Für die Berechnung des

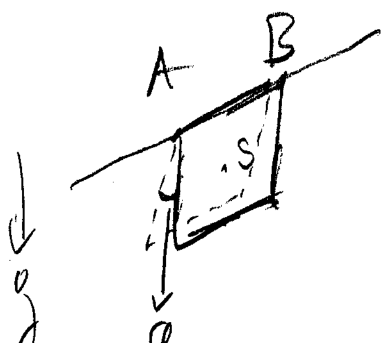


Trägheitsmoments Θ um die x-Achse nehmen wir als Massenelement $dm = \rho a\, dy$

$$\Rightarrow \Theta \; (= \Theta_{xx}) = \int_0^a y^2 a \rho \, dy = \frac{1}{3} a a^3 \rho, \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{a^2} \; \Big\} = \frac{1}{3} M a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta = \frac{1}{3} M a^2}$$

Kleine Schwingung um $\overline{AB}$:



$$\Theta \ddot{\varphi} + M g R \sin\varphi = 0$$

Schwerpunkt

$$R_S = \frac{a}{2}$$

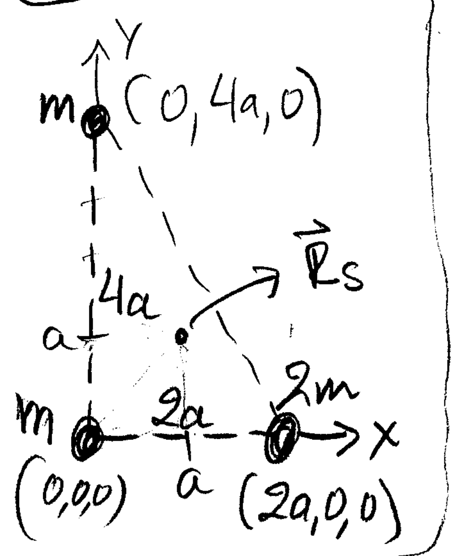
$$\Rightarrow \boxed{\Theta \ddot{\varphi} + M g \frac{a}{2} \sin\varphi = 0}$$

Kleine Schwingung um Achse $\overline{AB}$: $\sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow \boxed{\Theta \ddot{\varphi} + M g \frac{a}{2} \varphi = 0}$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \text{ mit } \boxed{\omega = \frac{3g}{2a}}$$

K7

K7-1



(a) Schwerpunkt $\vec{R}_S$:

$$\vec{R}_S = (x_S, y_S, z_S) = \underline{\underline{(x_S, y_S, 0)}}$$

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{m\cdot 0 + 2a\cdot 2m + m\cdot 0}{4m}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_S = a}$$

$$y_S = \frac{m\cdot 0 + 2m\cdot 0 + m\cdot 4a}{4m} = a \Rightarrow \boxed{y_S = a}$$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt: $\boxed{\vec{R}_S = (a, a, 0)}$

(b) Trägheitstensor

$$\Theta_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \left[\delta_{ij} |\vec{r}^{(l)}|^2 - r_i^{(l)} r_j^{(l)}\right] m^{(l)} \qquad (1)$$

bezüglich des Schwerpunktes $\vec{R}_S(a,a,0)$:

$\vec{r}_1{}' = (-a,-a,0)$ $\vec{r}_2{}' = (+a,-a,0)$; $\vec{r}_3{}' = (-a, 3a, 0)$ sind (2)
die Koordinaten der 3 Massenpunkten bzgl. des Schwerpunktes.
Mit der allg. Beziehung (1) und den Koordinaten
$\vec{r}_i{}'$ $(i=1,2,3)$ der 3 Massenpunkten bzgl. des Schwer-
punktes $\vec{R}_S$ kann man die Elemente des Trägheitstensors
Θ_{ij} $(i,j = x,y,z)$ bestimmen:

K7-2

zz-Komponente:

$$\Theta_{zz} = \sum_{l=1}^{3} \left[(x'^{l})^2 + (y'^{l})^2 + \cancel{(z'^{l})^2} - \cancel{(z'^{l})^2} \right] m^{(l)} =$$

Summe über die diskrete Massenverteilung

$$= \left(x'^{1\,2} + y'^{1\,2} \right) m^{(1)} + \left((x'^{2})^2 + (y'^{2})^2 \right) m^{(2)} + \left((x'^{3})^2 + (y'^{3})^2 \right) m^{(3)} =$$

$$= (a^2 + a^2) m + (a^2 + a^2)(2m) + (a^2 + 9a^2) m$$

$$= 16ma^2 \Rightarrow \boxed{\Theta_{zz} = 16ma^2}$$

Analog:

$$\Theta_{xx} = 16ma^2 - ma^2 - ma^2 - 2ma^2 = 12ma^2$$

$$\Theta_{yy} = 16ma^2 - m(3a)^2 - ma^2 - 2ma^2 = 4ma^2$$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -(-3ma^2 + ma^2 - 2ma^2) = 4ma^2$$

Alle andere Elemente sind 0, $\Rightarrow$

$$\boxed{\Theta = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

(b) Es ist offensichtlich, daß $\underline{\underline{\Theta_3 = \Theta_{zz} = 16ma^2}}$ K7-3

Um die anderen Hauptträgheitsmomente Θ_1 und Θ_2 zu finden, müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\vartheta_k & 1 \\ 1 & 1-\vartheta_k \end{pmatrix} = 0$$

mit $\Theta_k = 4ma^2\vartheta_k$. Dies ergibt

$$\vartheta_k^2 - 4\vartheta_k + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta_k = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Theta_{1,2} &= 4ma^2(2 \pm \sqrt{2}) \\ \Theta_3 &= 16ma^2 \end{aligned}}$$

(c) Da Θ blockdiagonal ist, ist der Vektor $(0,0,1)$ ein <u>Eigenvektor</u> mit dem Eigenwert $\Theta_3 = 16ma^2$

$\Rightarrow$ z-Achse ist eine der Hauptachsen.