5 Hausaufgabe zu Theorie der höheren Mechanik zum Montag, den 17.5.2010

H9

a) $I_{SP} = I' - MR^2$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

I' sei hier das in P9 ermittelte Trägheitsmoment $I' = \frac{2}{3}a^2M$

$I_{SP} = \frac{2}{3}a^2M - \frac{a^2}{\sqrt{2}^2}M = \frac{1}{6}a^2M$

b) Es gilt: $I' = AIA^T$

mit I':Trägheitstensor bei Koordsys. durch die Ecken,

I: Trägheitstensor bei Koordsys. durch die Mittelpunkte der Stirnflächen,

A: Rotationsmatrix zur Drehung der Achsen.

Der Trägheitsatensor des Koordsys. durch die Mittelpunkte der Stirnflächen ist

$$I = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Um das Koordinatensystem passend zu drehen, müssen wir es an 2 Achsen um 45° drehen.

$$\text{Also } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45°) & -\sin(45°) \\ 0 & \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(45°) & 0 & \sin(45°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(45°) & 0 & \cos(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{6\sqrt{2}} & 0 & \frac{Ma^2}{6\sqrt{2}} \\ \frac{Ma^2}{12} & \frac{Ma^2}{6\sqrt{2}} & -\frac{Ma^2}{12} \\ -\frac{Ma^2}{12} & \frac{Ma^2}{6\sqrt{2}} & \frac{Ma^2}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{6} \end{pmatrix}$$

Also ist das entsprechende Trägheitsmoment mit Achse durch die Ecken das der Achse durch die Mittelpunkte der Stirnflächen: $\frac{1}{6}Ma^2$

H10

Steiner'sche Satz: $I = I_{SP} + MR^2$. Da wir die Form der Masse nicht kennen, kann I_{SP} nicht nächer bestimmt werden.

Drehimpuls bleibt konstant, also: $P = I_{SP}\omega_0 = (I_{SP} + MR^2)\omega(t)$. Allgemein gilt $R = \int v dt$. Da hier v beibehalten wird, ist also R=vt.

Also $I_{SP}\omega_0 = (I_{SP} + Mv^2t^2)\omega(t) \Rightarrow \omega(t) = \frac{I_{SP}\omega_0}{I_{SP}+Mv^2t^2}$

Änderung: $\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{I_{SP}\omega_0}{I_{SP}+Mv^2t^2} = -\frac{2I_{SP}\omega_0 Mv^2t}{(I_{SP}+Mv^2t^2)^2}$