K1

$\gamma \simeq 31.6$

a) Weg des μ im Erdsystem

$s = vt$

Zeitdilatation $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

($\Delta t'$: Eigenzeit des μ)

$\Delta t' = \tau \qquad \Delta t = t$

$\rightarrow \quad t = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 70 \mu s$

$s = ct = 21 km > h$

b) zurückgelegter Weg des μ während seiner Lebensdauer:

$s' = v\tau \approx c\tau = 660 m$

Vergleich mit h'

Längenkontraktion: $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$\Delta x' = h \qquad \Delta x = h'$

$h' = h \sqrt{1 - v^2/c^2} = 320 m$

$s' = 660 m > h' = 320 m$

$\boxed{K2}$

(a) Zerlegung der Bewegung in

- Schwerpunktskoordinate $\vec{R} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2}$
- Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen

$$2m \ddot{\vec{R}} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 = 2mg\,\vec{e}_z$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{K}_1 - \vec{K}_2 + 2\vec{F}_{21} = 2\vec{F}_{21}$$

(b) $\vec{P} = 2m\dot{\vec{R}}$

$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = 2m\ddot{\vec{R}} \overset{\text{Bew. gl.}}{=} 2mg\,\vec{e}_z$

daraus folgt, dass P_z nicht erhalten ist ($\dot{P}_z = 2mg$)

(c) $\vec{L} = \vec{L}_R + \vec{L}_S$

$$\vec{L}_S = 2m(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\vec{L}_R = \frac{m}{2}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}$$

mit den Bewegungsgleichungen folgt:

$$\dot{\vec{L}}_S = 2m(\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}) = 2mg(\vec{R} \times \vec{e}_z) = 2mg(R_y, -R_x, 0)$$

$$\dot{\vec{L}}_R = \frac{m}{2}(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}_{21} = 0$$

Relativkoordinate des Drehimpulses ist also erhalten, von Schwerpunktskoordinate ist nur z-Komponente erhalten.

K3

Zeigen Sie, daß das Gravitationspotential einer homogenen Hohlkugel mit dem äußeren Radius b und dem inneren Radius a die Form hat

$$V(R) = -2\pi\gamma M\varrho \cdot \begin{cases} \frac{2}{3}(b^3 - a^3)R^{-1} \\ b^2 - a^2 \\ b^2 - \frac{2}{3}\frac{a^3}{R} - \frac{1}{3}R^2 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} R \geq b \\ a \geq R \\ b \geq R \geq a. \end{cases}$$

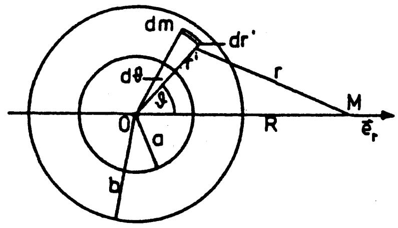
Lösung: ϑ : Polarwinkel, φ : Azimut (bei Drehung um die Gerade OM).
Nach dem Kosinussatz ist

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\vartheta, \qquad 2r\,dr = 2r'R\sin\vartheta\,d\vartheta$$

oder

$$\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{r\,dr}{r'R}. \qquad \underline{1}$$

Die potentielle Energie dV, die vom Massenelement dm herrührt, ist $dV = -\gamma M\,dv\,\varrho/r$, wobei das Volumenelement $dv = dr'\cdot r'd\vartheta\cdot r'\sin\vartheta\,d\varphi$ ist. Um die Gesamtenergie zu erhalten, ist dreimal zu integrieren, über φ, ϑ und r'.



Zur Berechnung des Potentials zwischen Massenpunkt und Hohlkugel.

$$\begin{aligned} V(R) &= -\gamma M\varrho \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr'}{r} \\ &= -\gamma M\varrho 2\pi \int_a^b \int_0^\pi \frac{r'^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,dr'}{r} \qquad \text{mit } \underline{1} \\ &= \frac{A}{R}\int_a^b \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r'\,dr\,dr' \qquad \text{mit} \quad A = -2\pi\gamma M\varrho. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun die drei Fälle:

1. $R \geq b$: Dann ist $r_{\min} = R - r'$, $r_{\max} = R + r'$, und wir bekommen

$$V(R) = \frac{A}{R}2\int_a^b r'^2 dr' = A\frac{2}{3}\frac{b^3 - a^3}{R}\left(= -\frac{\gamma M m}{R}\right).$$

2. $R \leq a$: $r_{\min} = r' - R$, $r_{\max} = r' + R$. Damit erhalten wir

$$V(R) = \frac{A}{R}2R\int_a^b r'dr' = A(b^2 - a^2).$$

3. $a \leq R \leq b$: Der Punkt liegt am Außenrand einer Kugelschale mit den Radien a und R und gleichzeitig am Innenrand einer Kugelschale zwischen R und b. Dann läßt sich die Energie aus den Beiträgen nach 1. und 2. zusammensetzen:

$$V(R) = A\left(\frac{2}{3}\frac{R^3 - a^3}{R} + b^2 - R^2\right) = A\left(b^2 - \frac{2}{3}\frac{a^3}{R} - \frac{1}{3}R^2\right).$$

$\boxed{K4}$

Trägheitsmoment: $I = \rho_0 \int_V \varrho^2 \, dV$

dV in Zylinder Koordinaten: $dV = \varrho \, d\varrho \, d\phi \, dz$

damit:

$$I = \rho_0 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z \cdot a} d\varrho \; \varrho \cdot \varrho^2$$

$$= 2\pi \rho_0 \int_0^h dz \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^{z \cdot a}$$

$$= 2\pi \rho_0 \int_0^h dz \; \frac{1}{4} z^4 a^4$$

$$= \frac{2\pi}{4} \rho_0 \, a^4 \left[\frac{1}{5} z^5\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi}{10} \rho_0 \, a^4 h^5 \qquad \text{setze } R = a \cdot h$$

$$= \frac{\pi}{10} \rho_0 \, h \, R^4$$

um I über die Masse auszudrücken, benötigen wir das Kegelvolumen:

$$V = \int_{Kegel} dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z \cdot a} d\varrho \; \varrho$$

$$= 2\pi \int_0^h dz \left[\frac{1}{2}\varrho^2\right]_0^{z \cdot a}$$

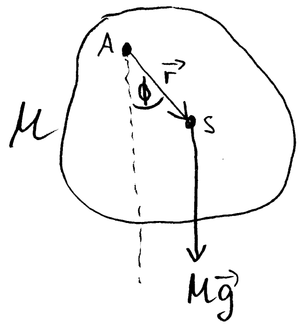
$$= \pi a^2 \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi}{3} a^2 h^3 = \frac{\pi}{3} h R^2$$

mit $M = \rho_0 \cdot V$ folgt:

$$I = \frac{3}{10} M R^2$$

K5



$|\vec{r}| = h$

Herleitung der Bewegungsgl. über das Drehmoment (siehe Vorlesung):

$$\vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{g} = \sum_k m_k \vec{r}_k \times \vec{g} = M \vec{r} \times \vec{g}$$

$$= - M h g \sin\phi \, \vec{k}$$

Einheitsvektor, der aus dem Blatt zeigt.

$\Rightarrow$ Bewegungsgl. folgt aus

$$\vec{M} = I_A \ddot{\vec{\phi}} = - M h g \sin\phi \, \vec{k}$$

zu $\ddot{\phi} + \frac{Mgh}{I_A} \sin\phi = 0$

Kleinwinkelnäherung: $\sin\phi \approx \phi$

Mit Satz von Steiner folgt:

$$I_A = I + h^2 M$$

also $\ddot{\phi} + \underbrace{\frac{Mgh}{I + h^2 M}}_{\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \phi = 0$

damit: $\frac{Mgh}{I + h^2 M} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow I = \left(\frac{T^2 g}{(2\pi)^2} - h\right) h M$

K6

$$\hat{\Theta} = M \begin{pmatrix} 6a^2 & a^2 & 0 \\ a^2 & 6a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix}$$

Hauptträgheitsachsen $\rightarrow$ Eigenvektoren
Hauptträgheitsmomente $\rightarrow$ Eigenwerte

① Hauptträgheitsmomente

Löse Eigenwertgl. $\det(\hat{\Theta} - \Theta I) = 0$

also: $$\begin{vmatrix} 6Ma^2 - \Theta & Ma^2 & 0 \\ Ma^2 & 6Ma^2 - \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 4Ma^2 - \Theta \end{vmatrix} = 0$$

$$(6Ma^2 - \Theta)\left[(6Ma^2 - \Theta)(4Ma^2 - \Theta)\right] - Ma^2\left[Ma^2(4Ma^2 - \Theta)\right] = 0$$

$$(4Ma^2 - \Theta)\left[(6Ma^2 - \Theta)^2 - M^2a^4\right] = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\Theta_1 = 4Ma^2}$$

$$\Theta^2 - 12Ma^2\Theta + 35M^2a^4 = 0$$

$$\Theta_{2/3} = \frac{12Ma^2 \pm \sqrt{144M^2a^4 - 140M^2a^4}}{2}$$

$$= 6Ma^2 \pm Ma^2 \qquad \Rightarrow \boxed{\Theta_2 = 7Ma^2}, \quad \boxed{\Theta_3 = 5Ma^2}$$

② Hauptträgheitsachsen

(I) $\hat{\Theta}\vec{\omega}_1 = \Theta_1 \vec{\omega}_1$

$$\begin{pmatrix} 6Ma^2 & Ma^2 & 0 \\ Ma^2 & 6Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4Ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^{(1)} \\ \omega_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} \end{pmatrix} = 4Ma^2 \begin{pmatrix} \omega_x^{(1)} \\ \omega_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{K6 ⑦}$

$$6\omega_x^{(1)} + \omega_y^{(1)} = 4\omega_x^{(1)} \Rightarrow \omega_y^{(1)} = -2\,\omega_x^{(1)}$$
$$\omega_x^{(1)} + 6\omega_y^{(1)} = 4\omega_y^{(1)} \Rightarrow \omega_x^{(1)} = -2\,\omega_y^{(1)}$$
$$\left.\right\} \omega_x^{(1)} = \omega_y^{(1)} = 0$$
$$4\omega_z^{(1)} = 4\omega_z^{(1)} \Rightarrow \omega_z^{(1)} \text{ ist beliebig}$$

also $\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(II) $\hat{\Theta}\,\vec{\omega}_2 = \Theta_2\,\vec{\omega}_2$

$$6\omega_x^{(2)} + \omega_y^{(2)} = 7\,\omega_x^{(2)} \Rightarrow \omega_x^{(2)} = \omega_y^{(2)}$$
$$\omega_x^{(2)} + 6\,\omega_y^{(2)} = 7\,\omega_y^{(2)} \Rightarrow \omega_x^{(2)} = \omega_y^{(2)}$$
$$4\,\omega_z^{(2)} = 7\,\omega_z^{(2)} \Rightarrow \omega_z^{(2)} = 0$$

also $\vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(III) $\hat{\Theta}\,\vec{\omega}_3 = \Theta_3\,\vec{\omega}_3$

$$6\,\omega_x^{(3)} + \omega_y^{(3)} = 5\,\omega_x^{(3)} \Rightarrow \omega_y^{(3)} = -\omega_x^{(3)}$$
$$\omega_x^{(3)} + 6\,\omega_y^{(3)} = 5\,\omega_y^{(3)} \Rightarrow \omega_x^{(3)} = -\omega_y^{(3)}$$
$$4\,\omega_z^{(3)} = 5\,\omega_z^{(3)} \Rightarrow \omega_z^{(3)} = 0$$

also $\vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zusatzinformation:

$\hat{\Theta}$ beschreibt z.B. folgendes System:

4 Punktmassen nach Skizze angeordnet und durch masselose Stangen verbunden.