H7 a) Betrachte nur z-Achse.

$$V_{Kopf} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \hat{=} 0.0045\,m^3\cdot\pi$$

$$V_{Rumpf} = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot h \hat{=} 0.046875\,m^3\,\pi$$

$$V_{Beine} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot h \hat{=} 0.02297\,m^3\cdot\pi$$

$$z_0 = \frac{h/2\cdot V_{Beine} + \frac{3h}{2}\cdot V_{Rumpf} + \left(2h+\frac{d}{2}\right)\cdot V_{Kopf}}{V_{Beine}+V_{Rumpf}+V_{Kopf}}$$

$$\hat{=} \frac{0.06889\,m}{0.07435} \approx 0.926$$

(Tatsächlich liegt der Schwerpunkt etwas unterhalb der Gürtelschnalle und somit etwas oberhalb der Mitte (vgl. Da Vinci, Der vitruvische Mensch))

(Hinweis auf Aufgabenblatt ist unnötig.)

Potential einer Kugel: s. Vorlesung

$$\phi_{\text{Kugel}}(\vec{r}) = -\frac{G\,M}{r}$$

Potential eines Zylinders entlang der Achse: ($z \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{Zylinder}}(z) &= -G\rho \int \frac{\mathrm{d}V'}{|\vec{r}_z - \vec{r}\,'|} \\
&= -G\rho \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}r \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} \\
&= -2\pi G\rho \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}r \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} \\
&= -2\pi G\rho \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, \sqrt{z^2+R^2} - z \\
&= -2\pi G\rho \frac{1}{2} \left(z_2\sqrt{R^2+z_2^2} + R^2 \log\left(z_2 + \sqrt{R^2+z_2^2}\right) - z_2^2 \right. \\
&\qquad \left. - z_1\sqrt{R^2+z_1^2} - R^2 \log\left(z_1 + \sqrt{R^2+z_1^2}\right) + z_1^2 \right)
\end{aligned}$$

Gesamtpotential:

$$\begin{aligned}
\phi(0) = -\pi G\rho \Bigg(& h\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2} + \frac{a^2}{4}\log\left(h + \sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}\right) \\
& -\frac{a^2}{4}\log\left(\frac{a}{2}\right) \\
& +2h\sqrt{\frac{b^2}{4}+4h^2} + \frac{b^2}{4}\log\left(2h + \sqrt{\frac{b^2}{4}+4h^2}\right) - 4h^2 \\
& -h\sqrt{\frac{b^2}{4}+h^2} - \frac{b^2}{4}\log\left(h + \sqrt{\frac{b^2}{4}+h^2}\right)\Bigg) \\
& - \frac{\pi\, d^3\, G\rho}{8}\frac{1}{2h+d/2}
\end{aligned}$$

Zahlenwerte:

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{Beine}} &= -813.1 \cdot \pi G\rho \\
\phi_{\text{Rumpf}} &= -426.9 \cdot \pi G\rho \\
\phi_{\text{Kopf}} &= -20.45 \cdot \pi G\rho
\end{aligned}$$

48 Kugelschale, Dicke dr', Masse $dM = 4\pi r'^2 \sigma$
$= \varrho_0 4\pi r'^2 dr'$

$$\phi(\vec{r}) = -G\int \frac{dM}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|} = -G dr' \varrho_0 \int \frac{1}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|} dF'$$

$$= -G\varrho_0 dr' \iint \frac{r'^2 \sin\theta' \, d\theta' d\phi'}{(r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\psi)^{1/2}}$$

$$= -G\varrho 2\pi r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{(r'^2+r^2-2rr'\cos\psi)^{1/2}}$$

mit $\psi = \psi(\theta', \phi', \theta, \phi)$

Wähle z-Achse in Richtung von $\vec{r}$
$\rightarrow \psi = \theta'$
Substitution. $u = \cos\theta'$, $du = -\sin\theta' d\theta'$

$$\phi(\vec{r}) = G\varrho 2\pi r'^2 dr' \int_{+1}^{-1} \frac{du}{(r'^2 + r^2 - 2rr'u)^{1/2}}$$

Bronstein $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$, $a = -2rr'$, $b = r'^2 + r^2$

$$= -G\varrho 2\pi r'^2 dr' \cdot \frac{2}{a}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b-a}\right)$$

$$= -G\frac{dM}{2rr'}\left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right)$$

$$= -G\frac{dM}{2rr'}\left((r+r') - |r-r'|\right)$$

Innen: $r < r'$: $-G\frac{dM}{2rr'}\left(r+r'-(r'-r)\right) = -G\frac{dM}{r'}$

Außen: $r > r'$. $-G\frac{dM}{2rr'}\left(r+r'-(r-r')\right) = -G\frac{dM}{r}$

endliche Dicke

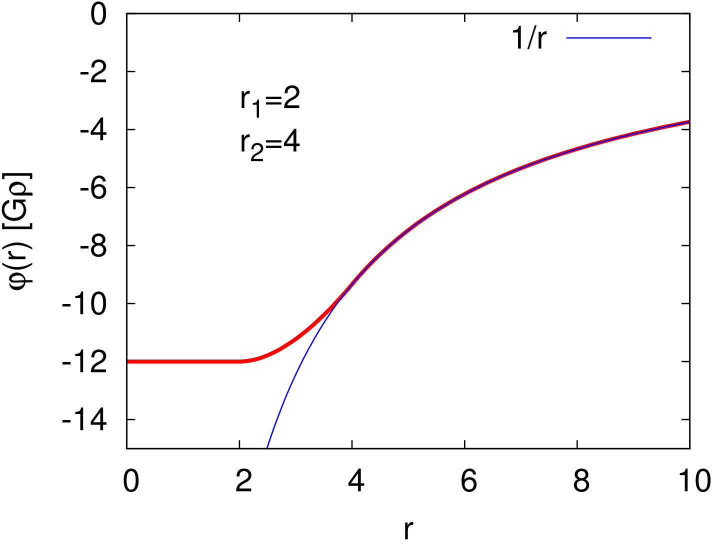
$$\phi(r) = \int_{r_1}^{r_2} -G\varrho 4\pi \frac{r'^2 dr'}{2rr'} \left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right)$$

$$= -G\varrho \cdot 2\pi \begin{cases} r_2^2 - r_1^2 & \text{für } r < r_1, r_2 \\ r_2^2 - \frac{2r_1^3}{3}\frac{1}{r} - \frac{r^2}{3} & \text{für } r_1 < r < r_2 \\ \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{3}\frac{1}{r} & \text{für } r > r_1, r_2 \end{cases}$$

<u>für $r_1 < r < r_2$:</u>

$$\phi(r) = -G\varrho \cdot 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r' dr'}{r} \left(r + r' - \sqrt{(r-r')^2} \right)$$

$$= -G\varrho 2\pi \left(\int_{r_1}^{r} \frac{2r'^2}{r} dr' + \int_{r}^{r_2} 2r' dr' \right)$$



1/r
r_1=2
r_2=4
φ(r) [Gρ]
r
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
0
2
4
6
8
10