10 Hausaufgabe zu Theorie der höheren Mechanik zum Montag, den 28.6.2010

H18

a) $\frac{d\vec{A}}{dt}|_F = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{A}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt}|_F = \frac{d\vec{\omega}}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}|_M$

b) $\frac{d\vec{x}}{dt}|_F = \frac{d\vec{x}}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{x}$

c) $\frac{d\vec{v}}{dt}|_F = \frac{d\vec{v}}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{v}$

H19

a) $\ddot{\vec{x}}(t) = -g\vec{e}_z$

$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = -gt\vec{e}_z + \vec{v}_0$

Sei $\lambda = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$, $v_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = -gt\vec{e}_z + \begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda) \\ v_{xy}\sin(\lambda) \\ v_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda) \\ v_{xy}\sin(\lambda) \\ v_z \end{pmatrix} t$

$\Rightarrow \vec{x}'(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ v_z \end{pmatrix} t$

b) $\ddot{\vec{x}}' = -g\vec{e}_z + 2\dot{\vec{x}}' \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\dot{\vec{x}}t)) = -g\vec{e}_z + 2\begin{pmatrix} \omega v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ -\omega v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\omega^2 v_{\mathrm{xy}}\cos(\lambda - t\omega) \\ -t\omega^2 v_{\mathrm{xy}}\sin(\lambda - t\omega) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}'(t) = -gt\vec{e}_z + 2\begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\omega v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ -t\omega v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ -v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + v_0'$

$= -gt\vec{e}_z + \begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\omega v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ -t\omega v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}'(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} -v_{\mathrm{xy}}\sin(\lambda - t\omega) \\ v_{\mathrm{xy}}\cos(\lambda - t\omega) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ -v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$+ \begin{pmatrix} tv_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ tv_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z t \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \begin{pmatrix} v_{xy}\cos(\lambda - \omega t) \\ v_{xy}\sin(\lambda - \omega t) \\ v_z \end{pmatrix} t$