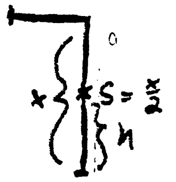
Gesamtlänge $l$, Massendichte $\rho$

**H16**




kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho l \cdot \dot{x}^2$

potentielle Energie: $V = m_x g h = g \cdot \rho x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} g \rho x^2$

a) Lagrangefunktion: $L = T - V = \frac{1}{2} \rho l \dot{x}^2 + \frac{1}{2} g \rho x^2 = \frac{1}{2} \rho \left( l \dot{x}^2 + g x^2 \right)$

b) Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\rho l \dot{x}) - g \rho x = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho l \ddot{x} - g \rho x = 0} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} - \frac{g}{l} x = 0$$

c) Lösen:

Lösungsansatz: $x = e^{+\lambda t}$ $\quad \dot{x} = +\lambda e^{+\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{+\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{+\lambda t} - \frac{g}{l} e^{+\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

allg. Lsg: $x = A e^{\sqrt{g/l}\, t} + B e^{-\sqrt{g/l}\, t}$, $\quad \dot{x} = A \sqrt{\frac{g}{l}} e^{\sqrt{\ } t} - B \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-\sqrt{\ } t}$

Anfangsbed. $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$

$$x(0) = A e^0 + B e^0 = A + B \stackrel{!}{=} a$$

$$\dot{x}(0) = A \sqrt{\frac{g}{l}} - B \sqrt{\frac{g}{l}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} (A - B) = 0 \Rightarrow A - B = 0$$

also: $\left| \begin{matrix} A + B = a \\ A - B = 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow A = \frac{a}{2}, \; B = \frac{a}{2}$

allg. Lsg.: $x = \frac{a}{2} e^{\sqrt{g/l}\, t} + \frac{a}{2} e^{-\sqrt{g/l}\, t}$

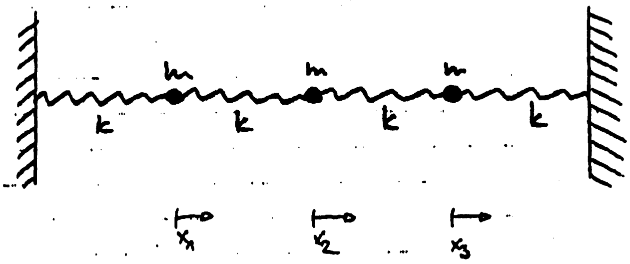
$$= \frac{a}{2} \left( e^{\sqrt{\ } t} + e^{-\sqrt{\ } t} \right) \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{x = a \cosh\left( \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \right)}$$

**H17**

3 Massen in einer Reihe ( nur longitudinale Schwingung )

**(a)** → Bewegungsgleichungen




$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(2x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(2x_2 - x_1 - x_3) = 0$$
$$\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(2x_3 - x_2) = 0$$

**(b)** Ansatz $\quad x_i(t) = a_i \cos(\omega t - \delta) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Determinante der Matrix muß 0 sein, andernfalls existiert die inverse Matrix und es folgt mit ($M\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow M^{-1}M\vec{a} = M^{-1}\vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$), nur die triviale Lösung $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \left[ \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^3 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right) \left[ \omega^4 - 4\frac{k\omega^2}{m} + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 2\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \left[ \omega^4 - 4\frac{k}{m}\omega^2 + 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2)_{2/3} = 2\frac{k}{m} \pm \sqrt{4\left(\frac{k}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

$$= \frac{k}{m}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = 2\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = (2-\sqrt{2})\frac{k}{m}}$$

## (c) Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$\omega_1^2 = 2\frac{k}{m}$

$$\begin{array}{ccc|c}
a_1 & a_2 & a_3 & \\
\hline
2\frac{k}{m}-2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 \\
-\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-2\frac{k}{m} & -k/m & 0 \\
0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-2\frac{k}{m} & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -a_3$

Schwingung

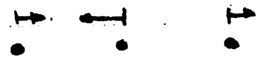
$\Rightarrow$ normierter Eigenvektor: $\quad \vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\frac{k}{m}$

$$\begin{array}{ccc|cl}
a_1 & a_2 & a_3 & & \\
\hline
2\frac{k}{m}-(2+\sqrt{2})\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 & \\
-\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-(2+\sqrt{2})\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & \\
0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m}-(2+\sqrt{2})\frac{k}{m} & 0 & \\
\hline
\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \\
1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & |\cdot\sqrt{2} \; ]- \\
0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \\
\hline
\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 & \\
0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & ]+ \\
\hline
\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad a_2 = a \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, a \;, \quad a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, a$

Schwingung



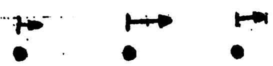
$\longrightarrow$ normierter Eigenvektor: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\omega_3^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{k}{m}$

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $2\frac{k}{m}-(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}$ | $-\frac{k}{m}$ | $0$ | $0$ | |
| $-\frac{k}{m}$ | $2\frac{k}{m}-(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}$ | $-\frac{k}{m}$ | $0$ | |
| $0$ | $-\frac{k}{m}$ | $2\frac{k}{m}-(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}$ | $0$ | |
| $\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $]$ |
| $-1$ | $\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $\vert \cdot \sqrt{2}\ ]_+$ |
| $0$ | $-1$ | $\sqrt{2}$ | $0$ | |
| $\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| $0$ | $1$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $]$ |
| $0$ | $-1$ | $\sqrt{2}$ | $0$ | $]_+$ |
| $\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | |
| $0$ | $1$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | |

$\Rightarrow \quad a_2 = a \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a \;, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a$

Schwingung



$\longrightarrow$ normierter Eigenvektor: $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$

(d) → Matrix aus diesen Eigenvektoren

$$\boxed{A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{3\times3} \checkmark$$

also $A^T = A^{-1}$ ist orthogonal; ist auch sofort einleuchtend, da die Eigenvektoren für (nichtentartete) Eigenwerte immer orthogonal zueinander sind [und man außerdem diese Eigenvektoren noch normiert hat]. Somit ist Spaltenorthonormalität ($\Leftrightarrow$ Orthogonalmatrix) automatisch gegeben.

(e) Kinetische Energie der Anordnung

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)}}$$

Dies läßt sich umschreiben in

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T \hat{T} \dot{\vec{x}}$$ (Matrixschreibweise)

$\Rightarrow$ Matrix der kinetischen Energie $\hat{T}$ ist diagonal: $\underline{\hat{T} = m \cdot \mathbb{1}_{3\times3}}$

potentielle Energie der Anordnung

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{2}k\left( x_1^2 + (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}k\left( 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \right)}}$$

Dies läßt sich umschreiben zu

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{2}k(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{x}^T \hat{V} \vec{x}}}$$

$\Rightarrow$ die Matrix der potentiellen Energie ist nicht-diagonal

$$\hat{V} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(#) Mit diesen beiden Matrizen $\hat{T}$ & $\hat{V}$ läßt sich das Gleichungssystem ①
anch darstellen als

$$(\hat{V} - \omega^2 \hat{T})\, \vec{a} = \vec{0} \quad , \text{ denn}$$

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[ "Division durch die Masse m ergibt das Gleichungssystem ①" ]

(g) Zu zeigen: Prozedur $A^T \hat{V} A$ diagonalisiert die Matrix der potentiellen Energie

[ die kinetische Energie ist bereits diagonal, deswegen gilt trivialerweise

$$\hat{T}' = A^T \hat{T} A = m \cdot A^T \cdot \mathbb{1}_3 \cdot A = m A^T \cdot A = m \mathbb{1}_3 = \hat{T} \quad ]$$

$$\hat{V}' = A^T \hat{V} A = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ man erhält eine Diagonalmatrix, deren Einträge gerade die Eigenfrequenzen sind (multipliziert mit m)

(h) Einführung der neuen Koordinaten $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ mittels $\vec{X}^T = \vec{x}^T \cdot A$!

$$\Rightarrow \quad X_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 \qquad - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_3$$
$$X_2 = \tfrac{1}{2} x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_2 + \tfrac{1}{2} x_3$$
$$X_3 = \tfrac{1}{2} x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_2 + \tfrac{1}{2} x_3$$

Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten:

$$\ddot{X}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ddot{x}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ddot{x}_3 = -\tfrac{k}{m}\left(\sqrt{2} x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_2\right) + \tfrac{k}{m}\left(\sqrt{2} x_3 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)$$
$$= \tfrac{k}{m}\sqrt{2}\,(-x_1 + x_3) = -\tfrac{k}{m} \cdot 2 \cdot X_1$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{X}_1 + 2\tfrac{k}{m} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0}$$

$$\ddot{X}_2 = \tfrac{1}{2}\ddot{x}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ddot{x}_2 + \tfrac{1}{2} \ddot{x}_3 = -\tfrac{k}{m}\left(x_1 - \tfrac{1}{2} x_2\right) + \tfrac{k}{m}\left(\sqrt{2} x_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} x_3\right) - \tfrac{k}{m}\left(x_3 - \tfrac{1}{2} x_2\right)$$
$$= -\tfrac{k}{m}\left(\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) x_1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) x_2 + \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) x_3\right)$$
$$\text{mit} \quad 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad (1+\sqrt{2}) = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= -\tfrac{k}{m}\left((2+\sqrt{2})\frac{x_1}{2} - (2+\sqrt{2})\frac{x_2}{\sqrt{2}} + (2+\sqrt{2})\frac{x_3}{2}\right)$$
$$= -\tfrac{k}{m}(2+\sqrt{2}) \quad X_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{X}_2 + (2+\sqrt{2})\frac{k}{m} X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0}$$

$$\ddot{X}_3 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m}\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right) - \frac{k}{m}\left(\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right) - \frac{k}{m}\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)$$

$$= -\frac{k}{m}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_1 + \left(1-\sqrt{2}\right)x_2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_3\right)$$

$$\text{mit} \quad 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad (1-\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{k}{m}\left((2-\sqrt{2})\frac{x_1}{2} + (2-\sqrt{2})\frac{x_2}{\sqrt{2}} + (2-\sqrt{2})\frac{x_3}{2}\right)$$

$$= -\frac{k}{m}(2-\sqrt{2}) X_3$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{X}_3 + (2-\sqrt{2})\frac{k}{m} X_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 = 0}$$

→ in den neuen Koordinaten sind die Differentialgleichungen **entkoppelt**! Die dabei auftretenden Lösungsfrequenzen sind gerade die Eigenfrequenzen des Systems