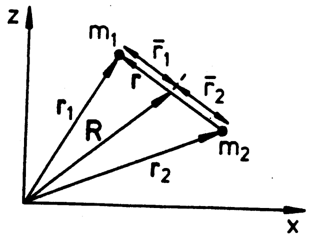
P7

1) 

$\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \mathbf{F}_{12},$$
$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2^{(\mathrm{ex})} + \mathbf{F}_{21}.$$

Für die beteiligten Kräfte gilt:

$$\mathbf{F}_1^{(\mathrm{ex})} = m_1 \mathbf{g}; \quad \mathbf{F}_2^{(\mathrm{ex})} = m_2 \mathbf{g}; \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Die gesamte äußere Kraft

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ex})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ex})} = M\,\mathbf{g}; \quad M = m_1 + m_2$$

bewegt den Schwerpunkt

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

unter Erfüllung des Schwerpunktsatzes:

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ex})} = M\,\mathbf{g}.$$

2) Mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{R}(t = 0) = 0; \quad \dot{\mathbf{R}}(t = 0) = \mathbf{v}_0$$

beschreibt der Massenmittelpunkt die Bahn:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2 + \mathbf{v}_0 \cdot t.$$

3) Der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$ läßt sich in einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil $\mathbf{L}_r$ und $\mathbf{L}_s$ zerlegen:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{2} m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{L}_r + \mathbf{L}_s,$$

wobei

$$\mathbf{L}_s = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})$$
$$\mathbf{L}_r = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}),$$
$$\text{mit } \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

gilt. $\mathbf{L}_s$ läßt sich explizit angeben:

$$\mathbf{L}_s = M\left(\frac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2 + \mathbf{v}_0 t\right) \times (\mathbf{g}\,t + \mathbf{v}_0) =$$
$$= \frac{1}{2} M (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{g}) t^2.$$

P8

Zwei Regentropfen gleicher Größe mit $0.2mm$ Durchmesser fallen mit einer Anfangsentfernung von $x_0 = 2mm$. Wie lange dauert es, bis die Tropfen verschmelzen?

Solange die Tropfen in einer horizontalen Ebene bleiben, handelt es sich um ein eindimensionales Problem, denn die Vertikalbewegung ist für beide Tropfen gleich.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F_1^i \quad ; \quad m_2 m_1 \ddot{x}_1 = m_2 F_1^i \\ m_2\ddot{x}_2 &= F_2^i \quad ; \quad m_1 m_2 \ddot{x}_2 = m_1 F_2^i \end{aligned} \tag{1.38}$$

Durch Subtraktion folgt:
$m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = (m_2 + m_1) F^i$, denn: $F_2 = -F_1 \equiv F^i$

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) &= F^i = -G\frac{m_1 m_2}{x^2} \\ \mu &= \frac{m}{2}, \quad \text{da gleiche Tropfen,} \quad x \equiv x_2 - x_1 \\ \ddot{x} &= -G\frac{4\mu}{x^2} \Rightarrow \mu\ddot{x} = -G\frac{4\mu^2}{x^2}\,. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Methode des Energieintegrals:

$$\begin{aligned} V(x) &= -G\frac{4\mu^2}{x} \\ E &= \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{4G\mu^2}{x} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{\gamma\mu}{x}\,; \quad \gamma = 4G\mu \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= -\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\gamma\mu}{x}\right)} \end{aligned} \tag{1.40}$$

negatives Vorzeichen der Wurzel, da relativer Abstand kleiner wird.

$$\Rightarrow t - t_0 = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\gamma\mu}{x'}\right)}} \tag{1.41}$$

Anfangsbedingung benutzt: $\dot{x} = 0$ für $x = x_0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\gamma\mu}{x_0}\right) \to \frac{2E}{\mu} = -\frac{2\gamma}{x_0} \\ \Rightarrow t - t_0 &= -\int \frac{dx'}{\sqrt{2\gamma\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x_0}\right)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = -\sqrt{\frac{x_0}{2\gamma}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{\frac{x_0}{x'} - 1}}\,. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Setze: $y = \frac{x'}{x_0} \Rightarrow dy = \frac{1}{x_0}dx'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t - t_0 &= x_0^{3/2}(-1)\int_{1}^{\frac{x}{x_0}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - 1}}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \\ &= \frac{x_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}}\left(\frac{x}{x_0}\sqrt{\frac{x_0}{x} - 1} + \arctan\sqrt{\frac{x_0}{x} - 1}\right) \end{aligned} \tag{1.43}$$

nach Tabelle (z. B. Bronstein).

Die beiden Tropfen verschmelzen, wenn $\frac{x}{x_0} \ll 1$. Dann trägt nun der zweite Term in der Klammer von (1.43) bei und gibt $\pi/2$.

$$t - t_0 = \frac{x_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}}\frac{\pi}{2}\,; \quad \gamma = 4G\mu\,. \tag{1.44}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} m &= \frac{4\pi}{3}a^3\rho\,; \quad a: \text{ Radius}\,; \quad G = 6.67\cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2 \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{8}\cdot\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\left(\frac{x_0}{a}\right)^{3/2} \\ a &= 0.01cm \Rightarrow t \approx 1.3\cdot 10^5\,\text{sec} \\ a &= 0.1\ cm \Rightarrow t \approx 4.2\cdot 10^3\,\text{sec} \end{aligned} \tag{1.45}$$

zu lange Zeiten zum Verschmelzen. Gravitation ist sehr schwache Kraft.