11 Hausaufgabe zu Theorie der höheren Mechanik zum Montag, den 5.7.2010

H20

a) $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + T(-\frac{x}{l}, -\frac{y}{l}, \frac{l-z}{l}) + 2m\omega(v_2\cos(\lambda), -v_3\sin(\lambda) - v_1\cos(\lambda), v_2\sin(\lambda))$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \ddot{x} & = -\tilde{T}\frac{x}{l} + 2v_2\cos(\lambda)\omega \\ \ddot{y} & = -\tilde{T}\frac{y}{l} - 2\omega v_3\sin(\lambda) - 2\omega v_1\cos(\lambda) \\ \ddot{z} & = -g + \tilde{T}\frac{l-z}{l} + 2\omega v_2\sin(\lambda) \end{array} \right| \text{ mit } \tilde{T} = \frac{T}{m}$$

Für Anfangsbedingung „Bewegung in hor. Ebene“ muss gelten $\ddot{z}(t) = \dot{z}(t) = z(t) = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \ddot{x} & = -\tilde{T}\frac{x}{l} + 2\omega v_2\cos(\lambda) \\ \ddot{y} & = -\tilde{T}\frac{y}{l} - 2\omega v_1\cos(\lambda) \\ 0 & = -g + \tilde{T} + 2\omega v_2\sin(\lambda) \end{array} \right| \text{ mit } \frac{l-z}{l} \to \frac{l}{l} = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{T} = g - 2\omega v_2\sin(\lambda) \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \ddot{x} & = -\frac{x}{l}(g - 2\omega v_2\sin(\lambda)) + 2\omega v_2\cos(\lambda) \\ \ddot{y} & = -\frac{y}{l}(g - 2\omega v_2\sin(\lambda)) - 2\omega v_1\cos(\lambda) \end{array} \right|$$

Als Nährung kann angenommen werden:$\frac{x\omega v_2\sin(\lambda)}{l} \approx 0$, da Faktoren im Zähler klein und Länge des Pendels im Zähler relativ groß

$$\Rightarrow \ \ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega v_2\cos(\lambda) = -\frac{g}{l}x + 2\omega\dot{y}\cos(\lambda), \qquad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega v_1\cos(\lambda) = -\frac{g}{l}y - 2\omega\dot{x}\cos(\lambda)$$

b) $\ddot{x} = -\frac{g}{l}x - 2\omega\dot{y}i^2\cos(\lambda), \qquad \ddot{y}i = -\frac{g}{l}yi - 2\omega\dot{x}i\cos(\lambda), \qquad d = x + iy$

$\Rightarrow \ddot{d} = \ddot{x} + i\ddot{y} = -\frac{g}{l}x - 2\omega\dot{y}i^2\cos(\lambda) - \frac{g}{l}yi - 2\omega\dot{x}i\cos(\lambda) = -\frac{g}{l}(x + yi) - 2\omega i(\dot{x} + \dot{y}i)\cos(\lambda) =$

$-\frac{g}{l}d - 2\omega i\dot{d}\cos(\lambda)$

Ansatz: $d(t) = Ae^{\gamma t}$

$\Rightarrow 0 = \ddot{d}(t) + 2\omega i\dot{d}(t)\cos(\lambda) + \frac{g}{l}d(t) = A(\gamma^2 + 2\gamma\omega i\cos(\lambda) + \frac{g}{l})e^{\gamma t} \Rightarrow 0 = \gamma^2 + 2\gamma\omega i\cos(\lambda) + \frac{g}{l}$

$\Rightarrow \gamma_{1,2} = -\omega i\cos(\lambda) \pm i\sqrt{\omega^2\cos^2(\lambda) + \frac{g}{l}} = -\omega i\cos(\lambda) \pm \sqrt{\frac{g}{l}}i\sqrt{\frac{\omega^2 l\cos^2(\lambda)}{g} + 1}$

Da Pendelfrequenz i.d.R. viel größer als Erdrotationsfrequenz,

also $\frac{g}{l} >> \omega^2$ ist $\sqrt{\frac{\omega^2 l\cos^2(\lambda)}{g} + 1} \approx 1$

$\Rightarrow \gamma_{1,2} = -\omega i\cos(\lambda) \pm \sqrt{\frac{g}{l}}i \qquad \Rightarrow \ d(t) = A_1e^{-i(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t} + A_2e^{-i(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t}$

Durch Konstruktion von d ist A komplex, also $A_1 = B_1 + iB_2, \ \ A_2 = C_1 + iC_2$.

Außerdem folgt nach Euler:

$d(t) = (B_1 + iB_2)(\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) - i\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t))$

$+(C_1 + iC_2)(\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) - i\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t))$

$= B_1\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + iB_2\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) - iB_1\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$+B_2\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_1\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + iC_2\cos((\omega cos(\lambda)$

$+\sqrt{\frac{g}{l}})t) - iC_1\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_2\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$= B_1\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + B_2\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_1\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$+C_2\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + i(B_2\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) - B_1\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$-C_1\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_2\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t))$

$\Rightarrow x(t) = B_1\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + B_2\sin((\omega cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$+C_1\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_2\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

$y(t) = B_2\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) - B_1\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$
$-C_1\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_2\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$
$\dot{x}(t) = -B_1(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + B_2(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$
$-C_1(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) + C_2(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$
$\dot{y}(t) = -B_1(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) - B_2(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t)$
$-C_1(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})\cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t) - C_2(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})\sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)$

Sinnvolle Anfangsbed.: zu $t = 0$ ausgelenkt ohne Anfangsgeschw. losgelassen

$\Rightarrow \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0, \quad x(0) = x_0$

$\Rightarrow x(0) = x_0 = B_1 + C_1, \quad y(0) = 0 = B_2 + C_2,$

$\dot{x}(0) = 0 = B_2(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}}) + C_2(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}}),$
$\dot{y}(0) = 0 = -B_1(\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}}) - C_1(\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})$

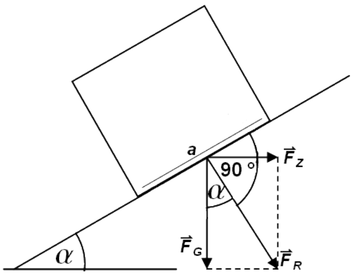
Da $\omega\cos(\lambda) << \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist $\frac{\omega\cos(\lambda)+\sqrt{\frac{g}{l}}}{\omega\cos(\lambda)-\sqrt{\frac{g}{l}}} = -1 \Rightarrow B_2 = C_2,\ B_1 = C_1 \ \Rightarrow B_1 = C_1 = \frac{x_0}{2},\ B_2 = C_2 = 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}(\cos((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + \cos((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)) = \frac{x_0}{2}(2\cos(\omega\cos(\lambda)t)\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t))$
$y(t) = -\frac{x_0}{2}(\sin((\omega\cos(\lambda) - \sqrt{\frac{g}{l}})t) + \sin((\omega\cos(\lambda) + \sqrt{\frac{g}{l}})t)) = -\frac{x_0}{2}(2\sin(\omega\cos(\lambda)t)\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t))$

(Winkeladdition bei Kosinus/Sinus)

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = x_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)\begin{pmatrix} \cos(\omega\cos(\lambda)t) \\ -\sin(\omega\cos(\lambda)t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

H21



$$\vec{x}(t) = \varrho\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \varrho\omega\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} == 2\pi\vec{f} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)2\pi}{2\pi\varrho} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\varrho}$$

Nun wirkt mit der Zentrifugalkraft die Gewichtskraft auf den Fahrgast, so dass die resultierende Kraft schräg auf die Schienen vom Kurven-Mittelpunkt weg. Wir nehmen nun an, dass die die Schienenebene einen derartigen Winkel zur Horizontalen bildet, dass die resultierende Kraft senkrecht darauf steht und der Fahrgast keine Beschleunigung mehr zur Seite, sondern nur noch nach unten (in seinem System, das Zuginnere) wahrnimmt.

$$\vec{F}_Z = m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x}) = \frac{m}{\varrho^2}\dot{\vec{x}}\times(\dot{\vec{x}}\times\vec{x}) = m\varrho\omega^2\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= m\varrho\omega^2\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t) \end{pmatrix} = m\varrho\omega^2\begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_R = \vec{F}_G + \vec{F}_Z = -m\begin{pmatrix} \varrho\omega^2\cos(\omega t) \\ \varrho\omega^2\sin(\omega t) \\ g \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_R\cdot\vec{F}_G = |F_R|\cdot|F_G|\cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{\vec{F}_R\cdot\vec{F}_G}{|F_R|\cdot|F_G|})$$
$$h = a\sin(\alpha) = a\sin\left(\arccos\left(\frac{m^2g^2}{m\sqrt{(\varrho\omega^2)^2+g^2}\cdot mg}\right)\right) = a\sin\left(\arccos\left(\frac{g}{\sqrt{\varrho^2\omega^4+g^2}}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{g^2}{\varrho^2\omega^4+g^2}}$$