$\boxed{D3}$

Transformationsverhalten allgemein:

z.B. $T^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$

$$T'^{\mu\nu} = A^\mu{}_\kappa a^\kappa A^\nu{}_\lambda b^\lambda = A^\mu{}_\kappa a^\kappa b^\lambda A^\nu{}_\lambda$$

$$= A^\mu{}_\kappa T^{\kappa\lambda} A^\nu{}_\lambda$$

$$= A^\mu{}_\kappa T^{\kappa\lambda} (A^T)_\lambda{}^\nu$$

$$\rightarrow T' = A T A^T$$

hier:

$$\delta'^\mu{}_\nu = (A\delta A^T)^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\kappa \delta^\kappa{}_\lambda (A^T)^\lambda{}_\nu$$

$$= A^\mu{}_\kappa \delta^\kappa{}_\lambda A_\nu{}^\lambda = A^\mu{}_\kappa (A^T)^\kappa{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

P4) Relativgeschwindigkeit $v$ zwischen Inertialsystemen $\Sigma$ und $\Sigma'$ in beliebiger Raumrichtung

$$\boldsymbol{r}: \quad \text{Ortsvektor in } \Sigma\,.$$

Zerlegung:

$$\boldsymbol{r}_\parallel = \frac{1}{v^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}: \quad \text{Komponente parallel zu } \boldsymbol{v}\,,$$

$$\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel: \quad \text{Komponente senkrecht zu } \boldsymbol{v}\,.$$

Analoge Zerlegung in $\Sigma'$:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp\,; \quad \boldsymbol{r}'_\parallel = \frac{1}{v^2}\left(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{v}\,.$$

Die senkrechte Komponente bleibt bei der Transformation ungeändert:

$$\boldsymbol{r}'_\perp = \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \frac{1}{v^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\,.$$

Wir nutzen die Isotropie des Raumes aus, die uns gestattet, die $z$-Achse in Richtung von $\boldsymbol{v}$ zu drehen. Die anschließende Argumentation entspricht der des Spezialfalls $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_z$,

$$r'_\parallel = \frac{1}{v}\left(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{v}\right) = \gamma\left(\frac{1}{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}) - vt\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\underbrace{\frac{1}{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}_{r_\parallel}\right)\,.$$

Damit bleibt insgesamt:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \gamma\,\boldsymbol{v}\,t + \frac{\gamma-1}{v^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\frac{1}{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\right)\,.$$

Transformationsmatrix:

$$u_{x,y,z} = \frac{v_{x,y,z}}{v}\,, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma u_x & -\beta\gamma u_y & -\beta\gamma u_z \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & 1+(\gamma-1)u_x^2 & (\gamma-1)u_x u_y & (\gamma-1)u_x u_z \\ -\gamma\frac{v_y}{c} & (\gamma-1)u_y u_x & 1+(\gamma-1)u_y^2 & (\gamma-1)u_y u_z \\ -\gamma\frac{v_z}{c} & (\gamma-1)u_z u_x & (\gamma-1)u_z u_y & 1+(\gamma-1)u_z^2 \end{pmatrix}\,.$$

Spezialfall: $\quad \boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x \quad \Rightarrow \quad u_x = 1\,, \quad u_y = u_z = 0$

$$\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$