Übungen zu **"Theorie der höheren Mechanik", Prof. Mosel, SS 2010**

Blatt Nr. 9: Präsenzaufgaben am 14.6.10, Hausaufgaben zum 21.6.10

Präsenzaufgaben:

P15. In der Vorlesung wurde die Lagrange-Gleichung für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \, \mathrm{d}t = 0$$

hergeleitet. Leiten Sie auf die gleiche Art die entsprechenden Lagrange-Gleichungen für ein System aus zwei Teilchen 1 und 2 mit je einem Freiheitsgrad und der Lagrange-Funktion $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)$ ab. q_i und $\dot{q}_i$ bezeichnen jeweils Ort und Impuls des i-ten Teilchens.

P16. Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Länge l, Masse m), dessen Aufhängepunkt harmonisch bewegt werde:

$$x(t) = A \sin(\Omega t).$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. (A und Ω seien positive Konstanten.)

(b) Wie lässt sich diese Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen vereinfachen? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen mit den Anfangsbedingungen $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ (ϕ sei der Auslenkwinkel).

Hausaufgaben:

H16. Ein Seil der Länge l und der Massendichte ρ (Masse pro Längeneinheit) rutscht reibungsfrei über eine Tischkante herunter.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion?

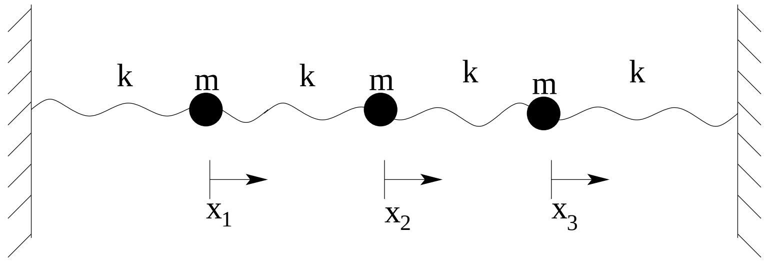
(b) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = a \quad (a > 0), \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Schwerpunktsbewegung.

H17. Gegeben sei ein System von drei gleichen Massen m, die mittels vier gleicher masseloser Federn mit Federkonstante k zwischen zwei Wänden aufgespannt sind (siehe Skizze).



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf.

(b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω_i.

(c) Berechnen Sie für alle Eigenfrequenzen ω_i den zugehörigen (normierten) Lösungsvektor $\vec{a}_i$ und diskutieren Sie die Art der Schwingung.

(d) Bestimmen Sie die Matrix $\mathcal{A}$, deren Spalten durch die normierten Eigenvektoren $\vec{a}_i$ gegeben sind ($\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$) und zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = 1_{3\times 3}$ ist.

(e) Wie lauten die kinetische T und die potentielle V Energie des Systems? Schreiben Sie T und V mit geeignet gewählten 3×3-Matrizen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{V}$ auf folgende Matrixform um:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T \mathcal{T} \dot{\vec{x}}, \quad V = \frac{1}{2}\vec{x}^T \mathcal{V} \vec{x} \quad .$$

Hierbei sind $\vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ und $\dot{\vec{x}}^T = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

(f) Zeigen Sie, dass mit diesen Matrizen das ursprüngliche Gleichungssystem (nach dem üblichen Ansatz) darstellen läßt als: $(\mathcal{V} - \omega^2\mathcal{T})\,\vec{a} = \vec{0}$.

(g) Zeigen Sie, dass man die Matrix der potentiellen Energie $\mathcal{V}$ durch die Transformation $\mathcal{V}' = \mathcal{A}^T\mathcal{V}\mathcal{A}$ auf eine *Diagonalform* bringen kann.

(h) (*Normalkoordinaten*) Führen Sie neue Koordinaten $\vec{X}^T = (X_1, X_2, X_3)$ über die Transformation $\vec{X}^T = \vec{x}^T\mathcal{A}$ ein, und bestimmen Sie deren Bewegungsgleichungen. Was fällt auf?