P1 (a)

$$T_r = T + T_r(0) = 2\,T_r(0) = \gamma\,T_r(0) \implies \gamma = 2.$$

Dies bedeutet:

$$\beta = \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866.$$

Die Geschwindigkeit des π^+-Mesons beträgt somit:

$$v(\pi^+) = 0.866\,c = 2.598 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(b) Zerfallszeit im Ruhesystem des Mesons:

$$\tau = 2.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}.$$

Zerfallszeit im Ruhesystem des Beobachters:

$$\tau' = \gamma\,\tau = 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}.$$

Zerfallsstrecke:

$$d = v\,\tau' = 12.990\,\mathrm{m}.$$

P2

Σ und Σ' seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}8\,c$ in z-Richtung relativ zueinander bewegen. Σ sei das Ruhesystem der Erde, Σ' das des Raumschiffs:

$$\Sigma \xrightarrow{v} \Sigma' .$$

Die Koordinatenursprünge sollen genau dann zusammenfallen, wenn das Raumschiff den Abstand d von der Erde hat. (Das Raumschiff befinde sich im Ursprung von Σ'.) Nach (1.21) und (1.22) gilt:

$$z' = \gamma(z - v\,t)\,; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) .$$

In Σ wird das Signal im Raum-Zeit-Punkt

$$z_0 = -d\,; \quad t_0 = 0$$

ausgesendet, in Σ' dagegen bei:

$$z_0' = -\gamma\,d\,; \quad t_0' = \gamma\frac{v}{c^2}d .$$

Das Signal hat in Σ' die Geschwindigkeit c und erreicht das Schiff nach der Zeitspanne:

$$\Delta t' = \frac{\gamma\,d}{c} \quad \text{(Lösung für 2.).}$$

Die *Signalankunft* hat in Σ die Koordinaten:

$$z_1 = \text{ Schiffsposition zur Zeit } t_1 ,$$

$$z_1 = v\,t_1 .$$

Wir suchen t_1. In Σ' gilt für den Punkt (z_1, t_1):

$$z_1' = \gamma(z_1 - v\,t_1) = 0 ,$$

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}z_1\right) = \gamma\,t_1\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{t_1}{\gamma} .$$

Die Laufzeit beträgt also vom Schiff aus gesehen:

$$\Delta t' = t_1' - t_0' = \frac{t_1}{\gamma} - \frac{\gamma d}{c^2}v .$$

Wir setzen die beiden Ausdrücke für $\Delta t'$ gleich und lösen nach t_1 auf:

$$t_1 = \frac{\gamma^2 d}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{\mathrm{d}}{c - v} .$$

Da $t_0 = 0$ ist, folgt für die Laufzeit, gemessen auf der Erdstation:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{\mathrm{d}}{c - v} \quad \text{(Lösung für 1.)} .$$

Zahlenwerte:

$$\gamma = \left(1 - (0{,}8)^2\right)^{-1/2} = \frac{5}{3} = 1{,}667$$

$$\Rightarrow \ \Delta t' = 3700\,\mathrm{s} ,$$

$$\Delta t \ = 11\,100\,\mathrm{s} .$$

Von Σ' aus gesehen erreicht das Signal das Raumschiff in einem Erdabstand von

$$\Delta z' = d + v\,\Delta t' =$$

$$= \left(6{,}66 \cdot 10^8 + 26{,}64 \cdot 10^8\right)\mathrm{km} =$$

$$= 3{,}33 \cdot 10^9\,\mathrm{km} .$$