P21

Eine Perle gleitet auf einem geraden Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der horizontalen Ebene rotiert. Stelle die Hamiltonfunktion auf und berechne $r(t)$.

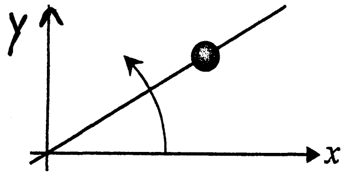

Abb. 15.3–2 Perle rutscht auf rotierendem Draht.

Lösung:

Die Zwangsbedingung ist rheonom. Wegen $V = 0$ gilt:

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\omega^2) = E_{\text{Perle}}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2\,\omega^2 \neq E_{\text{Perle}}$$

Wir sehen, daß Lagrange- und Hamiltonfunktion bei rheonomen Zwangsbedingungen zeitunabhängig sein können. Die allgemeine Lösung $r(t)$ der Bewegungsgl. $\ddot{r} = \omega^2\, r$ lautet:

$$r(t) = c_1\, e^{\omega t} + c_2\, e^{-\omega t}$$

wobei c_1, c_2 die beiden Integrationskonstanten sind. Einsetzen von $r(t)$ und $p_r(t) = m\,\dot{r}(t)$ in die Hamiltonfunktion liefert nach kurzer Rechnung:

$$H = \text{const}$$

Dieses Ergebnis ist natürlich auch direkt – ohne Rechnung – aus der expliziten Zeitunabhängigkeit von L bzw. H zu entnehmen.

P22

Berechne die eindimensionalen Schwingungen eines dreiatomigen, linearen Moleküls mit zwei gleichen Federkonstanten D.

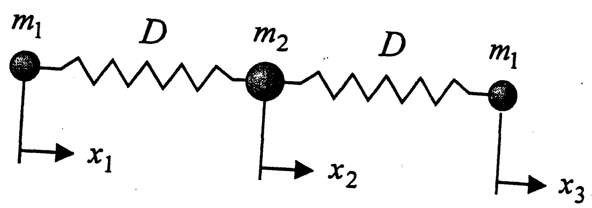

Abb. 15.3–1 Dreiatomiges Molekül

Lösung:

Die Hamiltonfunktion des Moleküls lautet

$$H = T + V = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \frac{D}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\right]$$

mit x_i = die Verrückungen aus der Gleichgewichtslage. Die kanonischen Gln. lauten:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1} \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -D\,(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad m_1\,\ddot{x}_1 = -D\,(x_1 - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -D\left[(x_2 - x_1) + (x_2 - x_3)\right]$$

$$\Rightarrow \quad m_2\,\ddot{x}_2 = -D\,(2\,x_2 - x_1 - x_3)$$

Auf die gleiche Weise erhält man die dritte Bewegungsgl.:

$$m_1\, x_3 = -D\,(x_3 - x_2)$$