1 Hausaufgabenbesprechung 7.11.12

1.1 Aufgabe

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -3 & -18 \end{array}\right)$$

$$(\tilde{A}^{(0)}|\tilde{b}^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$-l_{2,1} = \frac{3}{5}$, $-l_{3,1} = \frac{1}{5}$

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 2,2 & 1,8 & 9,8 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \end{array}\right)$$

$$(\tilde{A}^{(1)}|\tilde{b}^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \\ 0 & 2,2 & 1,8 & 9,8 \end{array}\right)$$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = \frac{\frac{6}{17}}{\frac{2}{17}} = 3$

$\Rightarrow x_2 = \frac{14,2-2,6*3}{3,4} = 2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-18+2*2+3*3}{-5} = 1$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(11) - 3(10) \neq 0$$

1.2 Aufgabe

1. natürliche Matrixnorm $||.||$ ist Norm!
   a) positiv definit: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass
   $Ax \neq 0 \Leftrightarrow ||Ax|| \neq 0$ (klar: $||x|| \neq 0$)

   1. Fall $A > 0 :\Rightarrow ||A|| = \sup\{\frac{||Ax||}{||x||} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$

   2. Fall $A = 0 :\Rightarrow Ax = 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow ||Ax|| = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow ||A|| = 0$

   b) Homogenität:
   Sei $\alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass
   $||\alpha A|| = \sup\left\{||\frac{(\alpha A)x}{||x||}\right\} = \sup\left\{\frac{|\alpha|||Ax||}{||x||}\right\} = |\alpha|\left\{\frac{||Ax||}{||x||}\right\} = |\alpha|||Ax||$

   c) Dreiecksungleichung:
   Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$||A+B|| = \sup\left\{\frac{||(A+B)x||}{||x||}\right\} = \sup\left\{\frac{||Ax+Bx||}{||x||}\right\} \leq \sup\left\{\frac{||Ax||+||Bx||}{||x||}\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||} + \frac{||Bx||}{||x||}\right\} = \sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||}\right\} + \sup\left\{\frac{||Bx||}{||x||}\right\} = ||A|| + ||B||$$

$\Rightarrow$ n-Matrixnorm ist Norm!

2. n.M. submultiplikativ:
   Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
   $$||A - B|| = \sup\left\{\frac{||ABx||}{||x||}\right\} = \sup_{Bx\neq 0}\left\{\frac{||ABx||}{||x||}\frac{||Bx||}{||Bx||}\right\}$$
   $$= \sup_{Bx\neq 0}\left\{\frac{||ABx||}{||Bx||}\frac{||Bx||}{||x||}\right\} = \sup_{Bx\neq 0}\left\{\frac{||Ax||}{||x||}\frac{||Bx||}{||x||}\right\} = \sup_{Bx\neq 0}\left\{\frac{||Ax||}{||x||}\right\}\sup_{Bx\neq 0}\left\{\frac{||Bx||}{||x||}\right\} = ||A||||B||$$

3. Warum $||A||_F \not\Leftrightarrow$ n.M.?
   Es sei $A = E_n$ die n dim Einheitsmatrix $n \in \{1\}$
   $$\Rightarrow ||A||_F = \left(\sum_{j,k=1}^{n} ||a_{jk}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j,k=1}^{n} 1\right)^{1/2} = \sqrt{n}$$
   Aber für jede Vektornorm $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:
   $$\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||x|| = 1 \neq \sqrt{n}\forall n > 1$$
   $\Rightarrow ||A||_F$ keine n.M.

1.3 Aufgabe

a) Berechne Operationen f.d. Schritt $A^{(0)} \to A^{(1)}$
$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & & & \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & & & \\ \vdots & & & a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & & \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & & & \\ \vdots & & & 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$
mit
$$a_{2i}^{(1)} = a_{21}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1i}^{(0)}$$
usw.

Operationen: (n-1) Divisionen und (n-1)(n-1) Multiplikationen.

Außerdem kommen für $b^{(0)} \to b^{(1)}$ noch dazu:
$$b_2^1 = b_2^0 - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^0$$
etc.

Insgesamt im 1. Schritt: 2(n-1) Divisionen $+(n-1)^2$ Multiplikationen.

Analog im i-ten Schritt: 2(n-i) Divisionen + $(n-i)^2$ Multiplikationen.

Damit also insgesamt für die Umformung $A^{(0)} \to A^(n-1)undb^0 \to b^{n-1}$:
$$\sum_{i=1}^{n-1}(2(n-i) + (n-i)^2) = 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 2\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$$

Berechne x durch Rx=c:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & & & \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & & & \\ \vdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_1^{n-1}$$

$\vdots$

b_n^{n-1}

Operationen:

1 Div: x_n

1 Div und 1 Mult: x_{n-1}

1 Div und (n-1) Mult: x_1

insgesamt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

für die Gaußelimination:

$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$

b) Gauß-Algorithmus anwenden auf $[A|I] =: [A^{(0)}|I^{(0)}]$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst eliminiere A. Nach (a) benötigen wir im i-ten Schritt (n-i) Div und $(n-i)^2$ Mult.

Außerdem überführe $I^{(i-1)}$ nach $I^{(i)}$ durch $(n-i)$ Mult. in i Spalten.

Wir erhalten $[A^{(0)}|I^{(0)}] \to [A^{(n-1)}|I^{(n-1)}]$:

$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n\frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$

n mal Rücksubstitution f. d. Lösung $[x^{(1)}, ..., x^{(n)}]$

$n\sum_{i=1}^{n-1} i = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$

Insgesamt: $(\frac{n^3}{2} + \frac{n}{2}) + (\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}) = n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^3 + O(n^2)$

1.4 Präsenzaufgabe

Cholesky-Zerlegung:

Für eine symmetrische, positiv definite Matrix A ex. eine Zerlegung in eine linke untere Dreiecksmatrix $\tilde{L}$ mit

$A = \tilde{L}\tilde{L}^T$

Für die Lösung des LGS Ax=b gilt $\tilde{L}\tilde{L}^T x = b \Leftrightarrow \tilde{L}y = b$ und $\tilde{L}^T x = y$

Betrachte die pos. def., symm Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist $\begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & 0 \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{12} & \tilde{l}_{13} \\ 0 & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} = A$

Anschaulich:

$\tilde{l}_{11}^2 = a_{11} = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{11} = \sqrt{2}$

Für die erste Spalte von A gilt nun:

$\tilde{l}_{21}\tilde{l}_{11} = a_{21} = -1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{11} = a_{31} = 3 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{31} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

2. Spalte:

$\tilde{l}_{21}^2 + \tilde{l}_{22}^2 = a_22 = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{22} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{21} + \tilde{l}_{32}\tilde{l}_{22} = a_{32} = -1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{32} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

3. Spalte:

$\tilde{l}_{31}^2 + \tilde{l}_{32}^2 + \tilde{l}_{33}^2 = a_{33} = 5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{l}_{33} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow \tilde{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix}$

1.5 Tipp für Blatt 3

Im Falle allgemeiner regulärer Matrizen gilt mit $||.||_2$:

$cond_2(A) = \sqrt{\frac{\max|\lambda(A^*A)|}{\min|\lambda(A^*A)|}}$

A^*: konj. Matrix zu A.

$\lambda(A^*A)$: EIgenwertspektrum von A^*A

Für $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ folgt:

$\det(B^*B - \lambda I) = |\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}|$

$= |\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6x + 4$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$ und $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$

$\Rightarrow cond_2(B) = \sqrt{\frac{|3+\sqrt{5}|}{|3-\sqrt{5}|}} \approx 2,618$