Übungen zur Elektrodynamik
Armin Bunde, Wintersemester 2010 / 2011

Übungsblatt zu den Übungen am 26.10.2010 (Blatt 1)

1. Aufgabe - Präsenz: ε-Tensor und ∇-Operator

Der ε-Tensor (vollständig antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} &= 1, \text{ falls i, j, k durch eine gerade Zahl von Permutationen aus 1, 2, 3 hervorgeht,} \\
\varepsilon_{ijk} &= -1, \text{ für eine ungerade Anzahl von Permuationen,} \\
\varepsilon_{ijk} &= 0, \text{ falls mindestens zwei Indizes übeinstimmen.}
\end{aligned}$$

$$\text{d. h.} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} &= -1 \end{aligned}$$

restliche $\varepsilon_{ijk} = 0$. $(\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\})$. Man zeige, daß

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

die geforderten Eigenschaften besitzt ($\delta_{\ell n}$: Kronecker Symbol) und weise die Gültigkeit der folgenden Relationen nach:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk} &= \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell} \\
\sum_{k,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk} &= 2\delta_{i\ell} \\
\sum_{k,j,i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6
\end{aligned}$$

2. Aufgabe - mündlich: a) Man zeige: mit Hilfe des ε-Tensors lässt sich

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

schreiben als:

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad \text{bzw.}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k; \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

b) Unter Verwendung des ε-Tensors weise man nach:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi &= 0 \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla}^2 \vec{v}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe - mündlich: Beweisen Sie die folgenden wichtigen Relationen, die wir häufig benötigen werden:

a) Gradient eines Skalarproduktes:

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{b} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

b) Divergenz eines Vektorproduktes:

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a}(\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

c) Rotatiòn eines Vektorproduktes:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla}\vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}).$$

4. Aufgabe - schriftlich: δ-Funktion

a) Zeigen Sie ($f(x)$ stetig differenzierbar):

$$\int_\alpha^\beta f(x)\delta'(x - x_0)dx = -f'(x_0), \quad \alpha < x_0 < \beta$$

Wie sieht $\int_\alpha^\beta f(x)\delta^{(n)}(x - x_0)dx$ aus?

b) $g(x)$ sei eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen

$$x_n \, [g(x_n) = 0, g'(x_n) \neq 0] \, .$$

Beweisen Sie die Identität:

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$