1 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 21.4.2010

1.1

a) Kreis: $\gamma \in [0, 2\pi] \to r(cos(\varphi), sin(\varphi))$
$L(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2(sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi))}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} rd\varphi = 2r\pi$

b) Schraubenlinie: $t \in [0, 2\pi] \to (rcos(\varphi), rsin(\varphi), \frac{h}{2\pi}t)$
$L(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}dt = 2\pi\sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}$

c) Zykloidbogen: $\varphi : [0, 2\pi] \to r(\varphi - sin(\varphi), 1 - cos(\varphi))$
$L(\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2((1 - cos(\varphi))^2 + sin^2}d\varphi$
$= \int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{1 - 2cos(\varphi) + cos^2(\varphi) + sin^2(\varphi)}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2cos(\varphi)}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} r\sqrt{-4cos^2(\frac{\varphi}{2})}d\varphi$
$= \int\limits_0^{2\pi} 2rsin(\frac{\varphi}{2})d\varphi = [4rcos(\frac{\varphi}{2})]_0^{2\pi} = 8r$

d) logarithmische Spriale: $t \in [0, \infty] \to e^{-\alpha t}(cos(wt), sin(wt))$
$L(t) = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \sqrt{w^2(sin^2(wt) + cos^2)e^{-2\alpha t} + \alpha^2 e^{-2\alpha t}(cos^2(wt) + sin^2(wt))}dt$
$= \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \sqrt{w^2 e^{-2\alpha t} + \alpha^2 e^{-2\alpha t}} = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R e^{-\alpha t}\sqrt{w^2 + \alpha^2} = \sqrt{w^2 + \alpha^2} \cdot \lim\limits_{R\to\infty} [\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}]_0^R$
$= \sqrt{w^2 + \alpha^2} \cdot \lim\limits_{R\to\infty} (\frac{e^{-\alpha R}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{w^2 + \alpha^2}$

1.2

Ellipse: $y(t) = (a \cdot cos(t), b \cdot sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$

$L(y) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 sin^2(t) + b^2 cos^2(t)} dt = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 sin^2(t) + b^2 cos^2(t)} dt$

$4aE(k) = 4a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} sin^2(t)} dt = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 sin^2(t) + b^2 sin^2(t)} dt$

$= 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - sin^2(t)) + b^2 sin^2(t)} dt = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 cos^2(t) + b^2 sin^2(t)} dt$

In einem der durch die Halbachsen gebildeten Viertel der Ellipse können bei der Berechnung des Bogens a und b vertauscht werden, da der Bogen dabei gleich bleibt.

$4aE(k) = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 cos^2(t) + b^2 sin^2(t)} dt = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 cos^2(t) + a^2 sin^2(t)} dt$

$= 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 sin^2(t) + b^2 cos^2(t)} dt = L(t)$

Für die Nährungsformel für kleine k benutze man die ersten 4 Terme der Taylorreihenentwicklung an der Stelle 0:

$L = 4a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-k^2 - sin^2(t))^n dt = 4a \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}(t) dt$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}(t) dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4(2n-3)!}{2^{2n} n!(n-2)!}$

$\Rightarrow L = 2a\pi \cdot (1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{6}{256}k^6 - \frac{175}{16384}k^8 - \dots)$

$\Rightarrow L \approx \pi(\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab})$

1.3

a) Konvergenz:
$\int x^3 e^{-x^2} dx$ wird von $\int x^3 e^{-|x|} dx$ eingeschlossen. Letzteres kann nach 3 partiellen Integrationen auf $[-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)]$ gebracht werden. Der Grenzwert dieser Stammfunktion nach $+\infty$ und nach $-\infty$ geht gegen 0, da „e-Funktion schlägt alles tot“. Somit konvergiert auch das ursprüngliche Integral $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

Flächenberechnung:
Da für $F(x) = x^3 e^{-x^2}$ gilt $F(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)^2} = -x^3 e^{-x^2} = -F(x)$, ist F punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit heben sich die Flächen links der y-Achse und rechts davon durch alternierende Vorzeichen auf bei unterer Grenze -R und oberer Grenze R.
Also $\int\limits_R^R x^3 e^{-x^2} dx = 0$. Also auch $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_R^R x^3 e^{-x^2} dx = 0$

b) $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{1}{3+x^2} = \lim\limits_{R\to\infty} [\frac{arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}]_0^R = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{cos(x)} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos(x)}{1-sin^2(x)} dx$
Substitution: $u = sin(x), \quad dx = \frac{1}{cos(x)} du$
$\Rightarrow \int\limits_{sin(0)}^{sin(\frac{\pi}{3})} \frac{1}{1-u^2} du = [-0,5ln(\frac{u-1}{u+1})]_0^{0,5\sqrt{3}} = -ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{\frac{3}{4}-1}}\right) + \frac{ln(-1)}{2}$
$= -ln(\sqrt{3}-2) + ln(i) + \frac{ln(-1)}{2} = -ln(2-\sqrt{3}) - ln(-1) + 2ln(i) = -ln(2-\sqrt{3})$

1.4

Konvergenz:
Problem: Bei $t \to 0$ (unterer Grenze) bei $t^{x-1}e^{-}t$ tritt ein Pol auf.
Da jedoch $t^{x-1}e^{-}t < t^{x-1}$ und t^{x-1}auf bechränkten Intervallen positiven Intervallen und $x > 0$ integrierbar ist, ist der Pol an dieser Stelle kein Problem für die Konvergenz.
Problem: Bei $t \to \infty$ (oberer Grenze) ist konvergenz nicht sofort klar.
Da jedoch $t^{x-1}e^{-}t < t^{-2}$ für hinreichend große t ist, da die e-funktion sehr schnell abfällt, ist die Funktion auf für große t konvergent.
Damit ist das Integral konvergent!

$$\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x e^{-t} dt$$
$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} [-t^x e^{-t}]_0^R}_{0} + \lim_{R\to\infty} \int_0^R x t^{x-1} e^{-t} dt$$
$$= x \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^0 e^{-t} dt = \lim_{R\to\infty} [-e^{-t}]_0^R = 1$$
nach $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt, dass
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$