2 Hinweis zu Mathematik für Physiker II zum Mittwoch, den 28.4.2010

Sei X ein vektorraum
Eine Abbildung $||.||\ x \to \mathbb{R}_0^+$ mit

(N1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x \in X$ $||x-y||$ Abstand x nach y.

(N2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = |\lambda| * ||x||$

(N3) $\forall x, y \in X$ gilt $||x-y|| \leq ||x|| + ||y||$ (aufgabe1 !)

heißt Norm auf X.
ohne N1 $\to$ Seminorm

Bsp: $x = \mathbb{R}^2$, $||\ || : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$
$||x|| = ||(x_1, x_2)|| = |x_1|$
Beh. $||.||$ ist eine Seminorm

$||x-y|| - ||x|| \leq ||y|| \Rightarrow ||-x|| = |-1| \cdot ||x|| = ||x||$

2)
st. Funktion, Teilmenge & Seminorm (eing) $\to$ ganze Norm
$0 = \int\limits_a^b f(x) dt$
a) $f \neq 0, \int\limits_a^b |f| = 0$
Riemann-integral (Treppenfunktion!)
b)Punkt nicht stetig, Grenzwert (0 oder 2)
zZ: (N1) gilt.

Bew: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$
zZ: (N2), (N3):
$||\lambda x|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2)|| = |\lambda x_1| = |\lambda||x_1| = |\lambda|||x|| \Rightarrow$ (N2)
$||x-y|| = ||(x_1 - y_1, x_2 - y_2)|| = |x_1 - y_1| \leq |x_1| + |y_1| = ||x|| + ||y||$
$\Rightarrow$ (N3) gilt
$\Rightarrow ||.||$ ist Semiraum

Zz: (N1) gilt nicht:
es gilt: $||0|| = |0| = 0$
$0 = ||x|| - ||(x_1, x_2)|| = |x_1| <\Rightarrow x_1 = 0$
D.h. $||(0,1)|| = |0| = 0$

$x \in \mathbb{R}^n$
$||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x^2)}$ euklidische Norm
$||x||_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2$

Beh. $||.|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$
$||x|| = ||(x_1, x_2, x_3)|| := 2|x_2| + \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = 2|x_2| + ||(x_1, x_3)||_2$

Satz 1.8: Alle Normen sind auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent
d.h. sind $||.||$, $|||.|||$ Normen, dann gibt es c_1, $c_2 > 0$ mit
$c_1||.|| \leq |||.||| \leq c_2||.||$

3)
Bsp: Bestimme $c_0 := ||.||_2 \leq c \leq ||.||_4$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$
$||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$
$||x||_4 = \sqrt[4]{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4}$
$||x||_4 = .. \geq \sqrt[4]{x_j^4} = |x_j|$
$||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} ||x_i||_4^2}$
$\sqrt(n||x||_4^2) = \sqrt(n)||x||_4 =: c = c(n)$

4)
Knobeln

5)
$U =< \mathbb{R}$
U heißt offen, wenn $\forall x \in U \exists r > 0 : B(x; r) \leq U$
$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht offen, denn angenommen [] wäre offen, dann gibt es $r > 0$ mit $B(a; r) \subseteq [a, b]$
Es ist für $x := a - \frac{r}{2} < a|x - a| = |a - \frac{r}{2} - a| = \frac{r}{2} < r$
D.h. $x \notin [a, b]$ und $x \in B(a; r)$. Widerspruch!

(a, b) offen, denn $x \in (a, b)$
$r := min\{x - a, b - x\}$
zZ: $B(x; r) \subseteq [a, b]$
Dann ist für $y \in B(x; r)$
$\Rightarrow y - a = y - x - (a - x) = x - a - (x - y) > |x - a| - (x - a) = 0$
$(x - y) \leq |x - y| \leq r \leq x - a$

$b - y = b - x - (y - x) > b - x - (b - x) = 0$
$(x - y) \leq |x - y| \leq r \leq b - x$
$\Rightarrow a < y < b$
$y \in (a, b)$

$\Rightarrow B(x; r) \subseteq (a, b)$
$\Rightarrow (a, b)$ offen

$|(-1)(x - y)| = |(-1)||x - y| = |x - y|$

Zusatz:
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$
Beh: $\overline{B(x_0; r)} = \overline{|x \in \mathbb{R}^n|||x - x_0|| < r} = |x \in \mathbb{R}^n|||x - x_0|| \leq r := B$
Bew: $x \in B(x_0; r) \Rightarrow x \in B$

sei $x_i : ||x - x_0|| = r$
sei $\delta > 0$
$y = x_0 + (1 - \frac{\varepsilon}{2r})(x - x_0)$
$y \in B(x; \delta) \in B(x_0; r)$
„$\leq$“ sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$
$\delta = ||x - x_0|| \Rightarrow B(x; \delta) \leq \mathbb{R}^n \setminus B$
$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$