2 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 28.4.2010

2.1

$$\big|\,||x|| - ||y||\,\big| = \big|\,||x+y-y|| - ||y||\,\big| \le \begin{cases} \big|\,||x-y|| + ||y|| - ||y||\,\big| = ||x-y|| \\ \big|\,||x+y|| + ||y|| - ||y||\,\big| = ||x+y|| \end{cases}$$

2.2

a) (ii) $||\lambda f(x)|| = \int\limits_a^b |\lambda f(x)| dx = \int\limits_a^b |\lambda||f(x)| dx = |\lambda| \int\limits_a^b |f(x)| dx = |\lambda|\ ||f(x)||$

(iii) $||f(x) + g(x)|| = \int\limits_a^b |f(x) + g(x)| dx \le \int\limits_a^b |f(x)| + |g(x)| dx = \int\limits_a^b |f(x)| dx + \int\limits_a^b |g(x)| dx =$ $||f(x)|| + ||g(x)||$

$\neg$(i) $f(x) := \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0 & , x \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow ||f(x)|| = 0 \not\Rightarrow f(x) = 0$

Damit ist $||.||$ eine Seminorm auf $R[a,b]$.
Da (i) nicht erfüllt ist, ist $||.||$ keine Norm.

b) Ist $||.||$ auf stetige Funktionen auf $[a,b]$ eingeschränkt, so gilt:

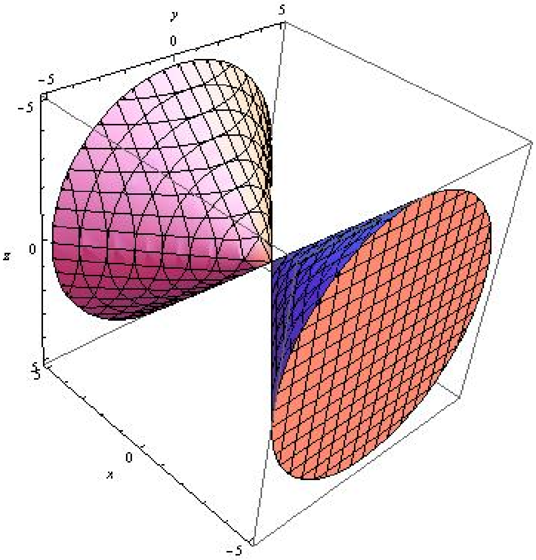
$\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0 \iff \exists x_0 \in \mathbb{R} : |f(x_0)| > 0 \iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon, \delta > 0 : \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\delta} |f(x)| dx > 0$
$\iff$
$\forall a, b \in \mathbb{R} : \int\limits_a^b |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f(x)|_{[a,b]} = 0$

Da also $||f(x)||$ im Intervall $[a,b]$ nur dann 0 ist, wenn $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ immer 0 ist, gilt nun auch das erste Kriterium für Normen.
Die Einschränkung auf die stetigen Funktionen macht $||.||$ zu einer Norm.

2.3

- $||.||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (|x_i|) \le ||.||_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, da die Summe das maximale Element ohne Vorzeichen mit einschließt und gegebenenfalls weitere Beträge der anderen Elemente addiert.
  $\Rightarrow c_1 \ge 1$, also z.B. $c_1 = 1$
- $||.||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2} \ge \sqrt{|xi|^2} = |x_i|$
  $||.||_1 = \sum\limits_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\le ||.||_2} \le \sum\limits_{i=1}^n ||.||_2 = n||.||_2$
  $\Rightarrow c_2 \ge n$, also z.B. $c_2 = n$
- $||.||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (|x_i|) \ge |x_i|$
  $||.||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\le ||.||_\infty}^2} \le \sqrt{n||.||_\infty^2} = \sqrt{n}||.||_\infty$
  $\Rightarrow c_3 \ge \sqrt{n}$, also z.B. $c_3 = \sqrt{n}$

2.4

a) 

b) Inneres:
$\mathring{M} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K| -1 < x_0 < 1, x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$
Für den Teil von $-1 < x_0 < 1$ ist $\mathring{M} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K|x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$ das innere von M, da es für alle Zahlen r mit $r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, r < x_0^2$ durch die dichte der reellen Zahlen ein größeres r_0 existiert, sodass $r < r_0 < x_0^2$.
Im Randbereich von $x_0 \in \{-1, 1\}$ gilt: für jeden Punkt, der von x_0 r weit entfernt ist existiert durch die dichte der Reellen Zahlen ein r_0, welches kleiner ist als r.
Dadurch ist jeder Punkt in $\mathring{M}$ nur von Punkten aus $\mathring{M}$ umgeben und damit das innere von M.

Rand:
$\partial M = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in R^4 \| x_0 \in \{-1, 1\}, x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
Für den Rand muss gelten: $\forall x \in \partial M \forall r \in \mathbb{R}|B_{||.||}(x, r) \cap M \neq \emptyset \wedge B_{||.||}(x, r) \cap \mathbb{R}^4 \setminus M \neq \emptyset$
Für alle Elemente x aus ∂M gilt, dass $x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \wedge x_0^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Da M so definiert wurde, dass $x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, gilt für alle von ∂M benachbarten Elemente mit $x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, dass Sie in M liegen und dass für alle $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ gilt $\forall \varepsilon > 0 : x_0^2 + \varepsilon > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sodass eine Menge dieser Punkte Teilmenge des Inneren von M wäre.
Außerdem gilt für alle $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : \forall \varepsilon > 0 : x_0^2 - \varepsilon < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sodass eine Menge dieser Punkte Teilmenge von $\mathbb{R}^4 \setminus M$ wäre.
Dmit hat jede Umgebung aller Elemente von ∂M gleichzeitig Elemente von M und von $\mathbb{R}^4 \setminus M$, wodurch dies der Rand ist.

Abschluss:
$\overline{M} = \partial M \cap \mathring{M} = M$, da M abgeschlossene Menge.

2.5

a) Die offene Kugel $B_{||.||}(x_0; r)$ ist definiert als $\{x \in \mathbb{R}^n | r > ||x - x_0||\}$
Damit diese Menge offen ist, müssen alle ihre Punkte von Punkten der Menge umgeben sein. Da die Reellen Zahlen dicht sind, gilt:
$\forall x \in B_{||.||}(x_0; r) \exists \delta > 0 | \{x | \delta = ||x - x_0||\} \subset B_{||.||}(x_0; r)\}$.
Daher sind innerhalb einer notwendig kleinen Umgebung um jeden Punkt innerhalb der Menge M alle Punkte auch innerhalb M.

b) Der Abschluss ist definiert als $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall r > 0 : B_{||.||}(x, r) \cap M \neq \emptyset\}$
$\overline{M}$ ist abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen.
$\mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists r > 0 : B_{||.||}(x, r) \cap \overline{M} = \emptyset\}$.

Da $\mathbb{R}$ dicht gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} \forall r \in \{r_0 | B_{||.||}(x,r) \cap \overline{M} = \emptyset\} \exists \delta > 0 | B_{||.||}(x, r+\delta) = \emptyset$.
Also $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} \exists r_x | B_{||.||}(x, r_x) = \emptyset$
und damit ist $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen und dementsprechend $\overline{M}$ geschlossen.

c) $(ii) \Rightarrow (i)$ siehe b)

$(i) \Rightarrow (ii)$ Wenn gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus M \exists r_x > 0 | B_{||.||}(x, r_x) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, also $B_{||.||}(x, r_x) \cap M = \emptyset$ (abgeschlossen), so gilt für die Komplimentäre Menge die Negation der Bedingung, also $\forall x \in M | \forall r > 0 : B_{||.||} \cap M \neq \emptyset$ (Abschluss)

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Für eine Folge (x_n) bedeutet $|x_n - x| -> 0$, dass diese Folge gegen den Grenzwert x konvergiert. Dies bedeutet dass für jedes $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index n gilt, dass alle Folgeelemente innerhalb der Menge $B_{||.||}(a, \varepsilon)$ liegen und nur endlich viele Elemente außerhalb.
Da diese Bedingung für alle Folgen (x_n) gelten sollen, muss es auf für eine Folge aus M gelten, die gegen einen Randpunkt von M konvergieren. Für diese Punkte gilt im Gegensatz zu allen Punkten außerhalb von M, dass die Folgeglieder in der Menge $B_{||.||}(a, \varepsilon) \cap M$ bleiben können, während der Randpunkt der Menge M nur dann Element von M ist, wenn der Rand von M Teilmenge von M ist. Da aber der Abschluss einer Menge $\overline{M} = \partial M \cap \mathring{M}$ und $\mathring{M} \subset M$, muss M der Abschluss sein.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Für den Fall, dass die Funktionsfolge wie eben beschrieben gegen einen Punkt auf dem Rand von M konvergiert, gilt nur dann wenn der Konvergenzpunkt x zur Menge M gehört, dass die Menge abgeschlossen ist, da wenn der Punkt x auf dem Rand von M zur Menge M gehört, für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $D := B_{||.||}(x, \varepsilon)$ gilt, dass $D \cap M \neq \emptyset$ und $D \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist.

d) nach b) ist $\overline{M}$ abgeschlossen.
Also ist nach c) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$