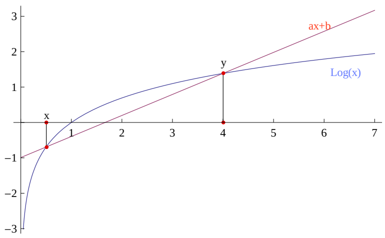
3 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 5.5.2010

3.1

a) 

Die Ungleichung sagt aus, dass für alle Punkte zwischen einem x und einem y mit $x < y$ gilt, dass alle Funktionwerte der Logarithmuskurve innerhalb des Intervalls $[x, y]$ einen größeren Wert als die Funktionswerte einer Gerade, die durch die Puntke $Log(x)$ und $Log(y)$ gehen, annehmen. Dies bedeutet, dass Die Grade in diesem Intervall unterhalb des Logarithmus liegen muss, mit Ausnahme der beiden Schnittpunkte $(x|Log(x))$ und $(y|Log(y))$. Da $Log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ist der Logarithmus überall konkav. Dies wiederum bedeutet, dass jede Funktion mit einer höheren Krümmung, also auch eine Gerade mit Krümmung=0, und 2 Schnittpunkten mit dem Logarithmus zwischen den Schnittpunkten ausschließlich niedrigere Funktionswerte annimmt.
Somit ist die Aussage bewiesen.

b) $ab = e^{ln(a)+ln(b)} = e^{\frac{1}{p}ln(a^p)+\frac{1}{q}ln(b^q)}$

$ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p}ln(a^p) + \frac{1}{q}ln(b^q) \Leftrightarrow e^{ln(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})} \geq e^{\frac{1}{p}ln(a^p)+\frac{1}{q}ln(b^q)}$

$\Rightarrow ab = e^{ln(a)+ln(b)} = e^{\frac{1}{p}ln(a^p)+\frac{1}{q}ln(b^q)} \leq e^{ln(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

3.2

$$| < x, y > | \leq ||x||_p||y||_q \Leftrightarrow \frac{|<x,y>|}{||x||_p||y||_q} \leq 1$$

$$| < x, y > | = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$$

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|<x,y>|}{||x||_p||y||_q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{||x||_p}\frac{|y_i|}{||y||_q} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{||y||_q^q} = \frac{1}{p||x||_p^p}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q||y||_q^q}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

3.3

Minkowski-Ungleichung: $||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$

$p = 1$: $\quad ||x + y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \overset{!}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

Dies ist lediglich eine Aufsummation von Dreiecksungleichungen.
Da also gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$, ist die Minkowski-Gleichung für $p = 1$ richtig.

$p = \infty$ $\quad \max_{i=1...n} |x_i + y_i| \overset{!}{\leq} \max_{i=1...n} |x_i| + \max_{i=1...n} |y_i|$

$\max_{i=1...n} |x_i + y_i| = |x_m + y_m| \leq |x_m| + |y_m| = \max_{i=1...n} |x_i| + \max_{i=1...n} |y_i|$

3.4

$a = 149597870km;\ b = 149576926km$
$U_{Naehr} = \pi(\frac{2}{3}(a + b) - \sqrt{ab}) = 9.39885 * 10^8 km$
$U_a = 2\pi a = 9.39951 * 10^8 km$, $U_b = 2\pi b = 9.3982 * 10^8 km$
Es fällt auf, dass U_{Naehr} fast exakt zwischen U_a und U_b mit dem Abstand $65798.7km$liegt, was lediglich einer Abweichung von0.007% entspricht.

Dies folgt aus dem relativ geringen Unterschied der beiden Halbachsen in Verbindung mit der großen Strecke.
$\frac{U_{Naehr}-U_b}{a_{Mond}} = 0.1712 = 17.12\%$ Also entspricht die Abweichung des Abstandes der Nährund zur Berechnung einer Kugel mit einer der beiden Halbachsen nur ca. 17% der großen Mondhalbachse um die Erde.

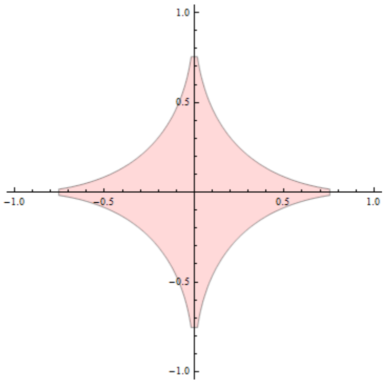
3.5

a) Um die Bogenlänge eines FUnktionsgraphen zu bestimmen, nähern wir die möglichen Kurven der Funktion als Dreiecke mithilfe von Pythagoras über möglichst kleine x und y differenzen an.
Also ist $s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\Delta x$
Nähert man dabei mit unendlichen vielen möglichst kleinen Dreiecken, lässt also $n \to \infty$ und $\Delta x \to 0$ gehen, sodass aber noch gilt, dass $\sum_{i=1}^{n} \Delta x = \beta - \alpha$, dann ergibt sich hieraus der Integralbegriff $\sqrt{1 + (\frac{f(x)}{\Delta x})^2}\Delta x = \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x$ für das Intervall $[\alpha, \beta]$.

b) $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$cosh'(x) = sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + sinh(x)^2}\Delta x = \left[\sqrt{\cosh^2(x)}\tanh(x)\right]_{-2}^{2} = 2sinh(2) \approx 7.25372$

3.6

a)



b) $||(x,y) + (u,v)||_{1/2} = [|x+u|^{1/2} + |y+v|^{1/2}]^2 = |x+u| + |y+v| + 2(|x+u||y+v|)^{1/2}$
$||(x,y)||_{1/2} + ||(u,v)||_{1/2} = [|x|^{1/2} + |y|^{1/2}]^2 + [|u|^{1/2} + |v|^{1/2}]^2$
$= |x| + |y| + |u| + |v| + 2(|x||y|)^{1/2} + 2(|u||v|)^{1/2}$
Soll $||.||_{1/2}$ eine Norm sein, so muss für alle (x,y) und (u,v) gelten:
$||(x,y) + (u,v)|| \leq ||(x,y)|| + ||(u,v)||$
Nun wähle man $(x,y) = (1,2)$, $(u,v) = (2,1)$.
$||(1,2) + (2,1)||_{1/2} = |1+2| + |2+1| + 2(|1+2||2+1|)^{1/2} = 3 + 3 + 2 * 3 = 12$
$||(1,2)||_{1/2} + ||(2,1)||_{1/2} = |1| + |2| + |2| + |1| + 2(|1||2|)^{1/2} + 2(|2||1|)^{1/2}$
$= 6 + 4 * \sqrt{2} \approx 11.66$
Da $12 \not\leq 11.66$ ist die Dreiecksungleichung verletzt und $||.||_{1/2}$ keine Norm.