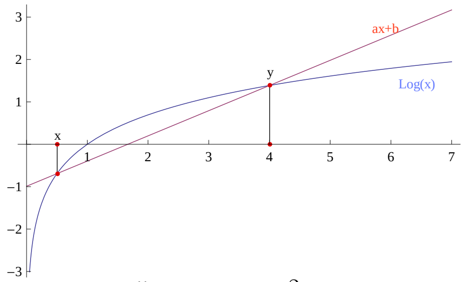
2 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 3, zum 28.4.2010

2.1

a) 

$(1-t)f(x)+tf(y) \leq f((1-t)x+ty)$
$\xi_t := (1-t)x+ty$
$\Delta(t) := f(\xi_t) - ((1-t)f(x)+tf(y))$
$\Delta(0) = 0 = \Delta(1)$
Annahme: $\exists t \in (0,1), \Delta(t) < 0$. Dann Δ ein negatives Minimum bei einem $t_min \in (0,1)$
Es ist $\Delta'(t) = f'(\xi_t)(y-x) + f(x) - f(y)$
$\Delta''(t) = \underbrace{f''(\xi_t)}_{<0}\underbrace{(y-x)^2} > 0$ Für $t \in [0,1] < 0$
Also $\Delta' < 0$ auf $(t_min, 1]$, $\Delta' > 0$ auf $[0, t_min)$. Folgt: $\Delta(t_min) > 0$, Wid.
Somit $\Delta \geq 0$ auf $[0,1]$

b) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (klar, falls a,b=0); Somit:
(1) äquivalent zu $log(ab) \leq log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q})$ (2)

Beweis: nach a): $(t := \frac{1}{p}, 1-t = \frac{1}{q})$
Rechte Seite$\geq \frac{1}{p}log(a^p) + \frac{1}{q}log(b^q) = log(a) + log(b) = log(ab)$ =linke Seite

2.2

Falls $|<x,y>| \leq 1$ für alle x,y mit $||x||_p = 1 = ||y||_q$, so folgt für bel. $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:
$|<x,y>| = \underbrace{|<\frac{x}{||x||_p}, \frac{y}{||y||_q}>|}_{\leq 1} * ||x||_p||y||_q$ (also Hölder-Ungleichung)

Im Fall (*): $|<x,y>| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sum_i |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^n (\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q})$

$$= \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_i |y_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

2.3

$||x+y||_1 = \sum(x_i+y_i) \leq \sum(|x_i|+|y_i|) = ||x||_1 + ||y||_1$

$||x+y||_\infty = \max_i |x_i+y_i| \leq \max_i(\underbrace{|x_i|}_{\leq ||x||_\infty} + \underbrace{|y_i|}_{\leq ||y||_\infty}) \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$

2.4

$2a\pi = 939951139km$
$2b\pi = 939819544km$
$L = 2a\pi - \underbrace{\pi\frac{a^2-b^2}{2a}}_{65793km}$
Abweichung zu $2b\pi \approx 65802km$, Erde-Mond$\approx 384400km$

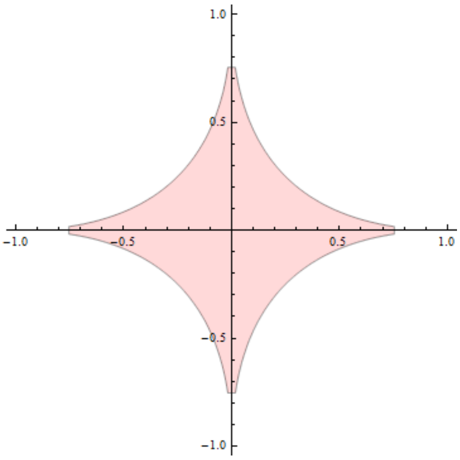
2.5

$\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x))$
$ds^2 = dx^2 + f'(x)^2dx^2$, $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx$

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(x))^2} dx$$

$$L = \int_{-2}^{2} \underbrace{\sqrt{1 + cosh'(x)^2}}_{cosh(x)} dx = 2sinh(2) = e^2 - e^{-2}$$

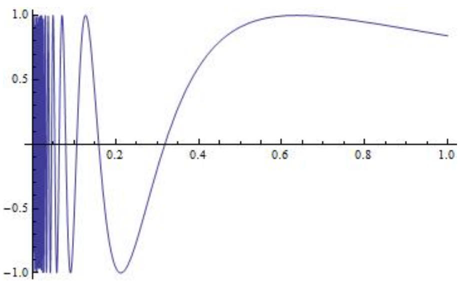
2.6



$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}$
Wäre $||.||_{1/2}$ Norm, so wäre $||0.5 * (1,0) + 0.5 * (0,1)||_{1/2} \leq ||0.5(1,0)||_{1/2} + ||0.5(0,1)||_{1/2}$
$= 0.5 \underbrace{||(1,0)||_{1/2}}_{1} + 0.5 \underbrace{||(0,1)||_{1/2}}_{1} = 1$
Aber $||(0.5, 0.5)||_{1/2} = (\sqrt{0.5} + \sqrt{0.5})^2 = (2\sqrt{0.5})^2 = 4 * 0.5 = 2$

2.7 Hinweise

1a) 1a) leicht



1b) Vermutung, Abschluss schießt 0-Punkt und y-Achse von -1 bis 1 ein!
Beweis über Konvergenz der Folge aus der Menge zu allen Punten UND
ALle Punkte im Abschluss Element der Folgen.

2a) sehr trivial

2b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ st.$\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^m$ offen: $f^{-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen: $f^{-1} \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen
(benutze $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus U)$) f ste $\Rightarrow \exists$ Kugel $\tilde{B}$ um x mit $f(\tilde{B}) \subset B \subset U$, also $f^{-1}(U)$ offen.

3 nicht überraschend...

4 plausibel (konsequenz Dreiecksungleichung (linker Teil!) $\to$ stetig), vektorraum stetig nicht überraschend, Multiplikation stetig ganz elementar (1 Punkt (a,b), alle Punkte aus der Nähe sollen nicht mehr als epsilon abweichen etc)

5 Dreiecksregel, geometrische Formeln $\pi(P)(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$