4 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 3, zum 28.4.2010

4.1

a) M Umg. von $x \Rightarrow \exists\delta > 0 : B(x,\delta) \subset \tilde{M} \Rightarrow x \in int(M)$
Falls $x \in int(M)$, so ex. $\delta > 0 : B(x,\delta) \subset$ M.
Setze $\tilde{M} := B(x,\delta), \tilde{M}$ offen, $x \in \tilde{M} \subset M$

b) $\overline{M} = M \cup \{0,y)| - 1 \leq y \leq 1\}$
Bew: „$\subset$“ Sei $(x,y) \in \overline{M}$. Dann ex. Folge$((x_m,y_m))$ in M mit $x_n \to x,\ y_n \to y$
Es ist $x_n \in (0,1]$, $y_n \in sin(\frac{1}{x_n})$, f,a,n$\in \mathbb{N}$.
Falls $x \neq 0$, folgt (Grenzen: $y = \lim y_n = \lim sin(\frac{1}{x_n}) = sin(\frac{1}{x})$
und $x \in (0,1]$, also $(x,y) \in M$
Falls $x = 0$, so wegen $y_n \in [-1,1]$ auch $y \in [-1,1]$
„$\supset$“ $M \subset \overline{M}$ klar.
Sei $y \in [-1,1]$. Z.z. ist: Es ex. $((x_n,y_n)) \subset M$. $(x_n,y_n) \to (0,y)$
Setze $x_n := \frac{1}{arcsin(y)+2\pi n}$, $y_n := sin(\frac{1}{x_n})$.
Dann $(x_n,y_n) \in M,\ x_n \to 0,\ y_n = y$

4.2

a) „$\Rightarrow$“ Sei f st. bei $x_0, i \in \{1,...,m\}, \varepsilon > 0$.
Es ex. $\delta > 0$ mit:
$\forall x \in M, ||x - x_0|| < \delta : \underbrace{||f(x) - f(x_0)||_\infty}_{\max\limits_{j=1,...,n} |f_j(x) - f_j(x_0)|} < \varepsilon$
insbes. $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$, falls $x \in M, ||x - x_0|| < \delta$
Also f st. bei x_0.
„$\Leftarrow$“Seien alle f_i st. bei $x_0, i = 1,...,m$
Sei $\varepsilon > 0$. Zu $i \in \{1,...,m\}$ ex. $\delta_i > 0$ mit $\forall x \in M, ||x - x_0|| < \delta_i : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$
Setze $\delta := \min\limits_{i=1,...,m} \delta_i > 0$. Für $x \in M, ||x - x_0|| < \delta$ gilt:
$\forall i \in \{1,...,m\} : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$, also $||f(x) - f(x0)||_\infty < \varepsilon$
Also f bei x_0 st.

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f st$\leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^m$ off.:$f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ off. (*)
Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei f st. und $U \subset \mathbb{R}^m$ off.
Sei $x \in f^{-1}(U)$ und $y := f(x)$, also $y \in U$.
Da U off, ex $\varepsilon > 0$ mit $B(y,\varepsilon) \subset U$.
Da f st. bei x, existiert $\delta > 0$ mit $f(B(x,\delta)) \subset B(y,\varepsilon) \subset U$
Also $B(x,\delta) \subset f^{-1}(U)$. Somit $f^{-1}(U)$ offen.
„$\Leftarrow$“ Gelte (*). Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y = f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$.
Dann $B(y,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ off., also wegen (*):$f^{-1}(B(y,\varepsilon))$ offen in $\mathbb{R}$
Also ex. $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon))$
Somit$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}, ||\tilde{x} - x|| < \delta : ||f(\tilde{x} - y|| < \varepsilon$, also $||f(\tilde{x}) - f(x)||y\varepsilon$
(*)$\Leftrightarrow \forall A \subset \mathbb{R}^m abg. f^{-1}(A) \subset \mathbb{R} abg.$
Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ abg. Dann $U := \mathbb{R}^m \setminus A$ off.
Also $f^{-1}(U)$ offen:$f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)$, also $f^{-1}(A)$ abg.
„$\Leftarrow$“ analog.

4.3

Falls $f, g \in V$, so gilt $\forall M : (f+g)(x) = f(x) + g(x) = add(f(x), g(x))$,
wobei add: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$(u,v) \mapsto u + v$
Somit f+g st. (Komposition st. Fu'n).
Ähnlich λf st., falls $\lambda \in \mathbb{R}, f \in V$
Additivismus von Fu. f: Fu-f auch st.

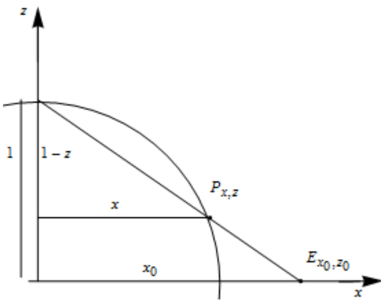
4.4

a) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$, also falls $\|x-y\| \le \varepsilon$, so $\big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon$ß

b) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (a,b) \mapsto a+b$
Benutze hin $\|(a,b)\|_\infty := \max\{\max_i |a_i|, \max_i |b_i|\}$
her:$\|c\| := \max_i |c_i|$
Falls $\tilde a, \tilde b \in \mathbb{R}^n, \|(\tilde a, \tilde b) - (a,b)\|_\infty < \varepsilon/2$ so ist $\|\tilde a + \tilde b - (a+b)\|_\infty = \|\tilde a - a + \tilde b - b\|_\infty \le \underbrace{\|\tilde a - a\|_\infty}_{y\varepsilon/2} + \underbrace{\|\tilde b - b\|_\infty}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$

c) Sei $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$.
$|ab - b_0 a_0| \le |a(b-b_0) + ab_0 - a_0 b_0| \le |a||(b-b_0)| + |(a-a_0)||b_0|$
Setze $\delta := min\{1, \frac{\varepsilon}{|a_0|+1+|b_0|}\}$
Für $(a|b) \in \mathbb{R}^2, \|(a,b) - (a_0,b_0)\|_\infty < \delta$ gilt:
$|ab - a_0 b_0| \le |a| \underbrace{|b-b_0|}_{<\delta} + |b_0| \underbrace{|a-a_0|}_{<\delta} \le \delta(\underbrace{|a|}_{<|a|+1} + |b|) \le \delta(|a_0| + 1 + |b_0|) \le \varepsilon$

4.5



$\frac{z}{1} = \frac{\|(\tilde x, \tilde y)\| - \|(x,y)\|}{\|(\tilde x, \tilde y)\|}$
$\frac{\tilde r - r}{\tilde r} = z$
$\tilde r = \frac{r}{1-z}$
$\Pi(P) = \frac{1}{1-z}(x,y,0)$

Inverse Ab: löse $\pi(x,y,z) = (\tilde x, \tilde y, 0)$ nach x, y, z auf:
$\frac{1}{1-z}(x,y,0),\ \frac{x}{1-z} = \tilde x,\ \frac{y}{1-z} = \tilde y,\ \underbrace{x^2 + y^2}_{(1-z)^2(\tilde x^2 + \tilde y^2)} + z^2 = 1$
$(1-z)^2(\tilde x^2 + \tilde y^2) + z^2 = 1 \Rightarrow (1-z)^2(\tilde x^2 + \tilde y^2) = 1 - z^2 = (1-z)(1+z)$
$(1-z)(\tilde x^2 + \tilde y^2) = 1 + z$
$z(1 + \tilde x^2 + \tilde y^2) = \tilde x^2 + \tilde y^2 - 1$
$z = \frac{\tilde x^2 + \tilde y^2 - 1}{\tilde x^2 + \tilde y^2 - 1}$
$1 - z = \frac{2}{1 + \tilde x^2 + \tilde y^2}$
$\Rightarrow x = \frac{2\tilde x}{1 + \tilde x^2 + \tilde y^2},\ y = \frac{2\tilde y}{1 + \tilde x^2 + \tilde y^2}$

Π^{-1} st. (aus st. Fu'n auf $\mathbb{R}^2$ aufgebaut). z.B. Pr_1: $\underset{(\tilde x, \tilde y) \mapsto \tilde x \in \mathbb{R}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ stetig. entspr. Pr_2.
$\mathbb{R} \ni u \mapsto u^2$ stetig. $\frac{2\tilde y}{1 + \tilde x^2 + \tilde y^2} = \frac{2Pr_2(\tilde x, \tilde y)}{1 + (Pr_1(\tilde x, \tilde y))^2 + (Pr_2(\tilde x, \tilde y))^2}$ etc. etc.
Π auch stetig (auf $S^2 \setminus N$)
(Π) ist winkeltreu!