4 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 3, zum 28.4.2010

4.1

b)

$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$, $J_\psi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$, $J_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren linear unabh., daher Basis des Bildes von $D\psi(1,1)$

4.2

$div(f) = \partial_1 f_1 + ...\partial_2 f_2 = 2x\sin(y)e^z + x^3\cos(z)e^y + x\arctan(y)\frac{2z}{1+z^2}$

$\nabla div(f) = (2\sin(y)e^z + 3x^2\cos(z)e^y + \arctan(y)\frac{2z}{1+z^2}, ..., ...)$

$rot(f) = (\frac{x\log(1+z^2)}{1+y^2} + x^3 y\sin(z), x^2\sin(y)e^z - \arctan(y)\log(1+z^2), 3x^2\cos(z)e^y - x^2\cos(y)e^z)$

$rot(rot(f)) = (..., ..., ...)$

$\Delta f_1 = (\frac{\partial}{\partial x})^2 f_1 + +(\frac{\partial}{\partial y})^2 f_1 + (\frac{\partial}{\partial z})^2 f_1 2\sin(y)e^z - \cancel{x^2\sin(y)e^z} + \cancel{x^2\sin(y)e^z}$

$\nabla div(f) - rot(rot(f)) = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$ für alle C^2 -Vf f

4.3

$J_f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & \sin(z)e^y & \cos(z)e^y \\ y^3z^2 - e^z\sin(x) & 3y^2xz^2 & 2zxy^3 + e^z\cos(x) \end{pmatrix}$

Bei (1,0,$\frac{\pi}{2}$):$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -e^{\pi/2}\sin(1) & 0 & e^{\pi/2}\cos(1) \end{pmatrix}$

4.4

$J_F(x) = \begin{pmatrix} -e^{-x_2^2} & 2x_1x_2e^{-x_2^2} \\ \pi\cos(\pi x_1) & \pi\sin(\pi x_2) \\ 2x_1 + x_2^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix} = \left(\partial_1 F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \partial_2 F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

J_G analog.

4.5

$F(1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{pmatrix}, y_1y_2 + y_3 = -e^{-1} + 2 > 0$

$\Rightarrow F(1,1) \in M$ ($M \subset \mathbb{R}^3$ offen); Mit $f(y_1,y_2,y_3) := y_1y_2 + y_3$ ist $M = f^{-1}((0,\infty))$

Urbild offener Menge unter der st. Fu f.

Da F ste. ex. Umg. von (1,1) in $\mathbb{R}^2$, die nach M abgebildet wird. Auf :$G \circ F$ definiert.

Nach Kettenregel: $G \circ F$ auf U dbar.

$J_H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = J_G(F(1,1)) \cdot J_F(1,1)$=(Einsetzen in Formel aus Aufgabe 4

$=\begin{pmatrix} -1 & -e^{-1} + 4 & e^{-1} + 4 \\ \frac{1}{2-e^{-1}} + 24e^{-2} & \frac{-e^{-1}}{2-e^{-1}} - 24e^{-3} & \frac{1}{2-e^{-1}} - 12e^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ -\pi & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ =Ergebnis

4.6

„⇒“

Sei f bei z_0 komplex dbar. Sei $\varepsilon > 0$
$Esex.\delta > 0 mit \forall z \in U, |z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$
Die Abbildung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni v \mapsto f'(z_0) \cdot v$ erfüllt offenbar die Def. der Dbarkeit.,
ist also gleich $Df(z_0) \Rightarrow$ ex.
Darstellende Matrix $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$Df(z_0)(1,0) = f'(z_0) \cdot 1 = \alpha + i\beta * \alpha(1,0) + \beta(0,1)$
$Df(z_0)(0,1) = f'(z_0) \cdot i = \alpha i - \beta = -\beta(1,0) + \alpha(0,1)$
Also $Df(z_0)$ durch mult mit $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ gegeben.

„⇐“

Sei f reell dbar. bei z_0 und $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Setze $c = \alpha + i\beta$
Zu $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ mit $\forall z \in U : ||z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0) - J_f(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$
$\underbrace{J_f(z_0)(z - z_0)}_{reell\ mult.} = \underbrace{c(z - z_0)}_{komplx.\ mult.}$
Also f komplx dbar bei z_0, $f'(z_0) = c = \alpha + i\beta$

5 Hinweise zum neuen Blatt:

3) losdifferent. Kugel etc.
2) Zylinder (b und r) (nach r radial nach außen, nach z nach oben,phi nach hinten)
1) geom arg (young ungl.) (monoton wachsend, umkehrbar f mit einem x=a und y=b (beliebig, kein Zusammenhang), $a * b- >$Rechteck, Ecke liegt nicht auf Graf, Teilfläche unten int(0 bis 1) $f(x)dx >$ integral(0 bis b) $f^-1(y)dy$
4) (Projektion) Spiegelung am Einheitskreis: $z- > 1/qz = 1/(x - iy) = (x + iy)/(x^2 + y^2)$ Betrag: $r- > 1/r$ nicht linear.
Stereographische Projektion Formel $\iota : z \mapsto 1/z$, $\pi^-1 \circ \iota \circ \pi$...
5) Trivial
6) Großkreisbogen mit MP bei Kugelmittelpunkt kleinste Strecke. wieweit nordlich?