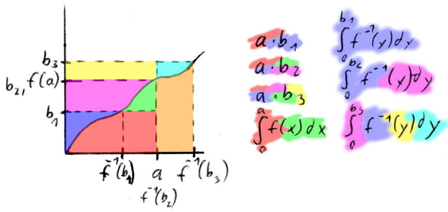
6 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 26.5.2010

6.1



a) 1. Fall: $b_1 < f(a)$:
Zu zeigen ist, dass das Rechteck der Seitenlängen $a * b_1$ kleiner gleich $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_1} f(y)dy$ ist. Wie in der Zeichnun zu sehen, bildet der rote und der blaue Bereich das Rechteck $a * b_1$. Dieses Rechteck zusammen mit dem grünen Bereich ist jedoch $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_1} f(y)dy$. Da also das Rechteck davon eingeschlossen wird, gilt die Behauptung hier.
2. Fall: $b_2 = f(a)$:
Nun soll das Rechteck $a * b_2$ im Bereich von $\int_0^a f(x)dx$ und $\int_0^{b_2} f(y)dy$ enthalten sein. In der Zeichnung wird $\int_0^a f(x)dx$ von Rot und Grün und $\int_0^{b_2} f(y)dy$ von Blau und Violett gebildet. Das Rechteck $a * b_2$ ist aber gerade Rot, Grün, Blau und Violett! Daher sind die beiden Flächen identisch, das Rechteck also in der Summe der Integrale enthalten.
3. Fall: $b_3 > f(a)$:
Das Rechteck $a * b_3$ wird in der Zeichnung nun gebildet von Rot, Blau, Grün, Violett und Gelb. $\int_0^{b_3} f(y)dy$ wird durch die Farben Blau, Violett, Gelb und Türkis dargestellt. Zusammen mit dem rot-blauen $\int_0^a f(x)dx$ enthält der Menge der Farben von $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_2} f(y)dy$ die von $a * b_3$, weswegen auch hier die Aussage gilt.

b) $f(x) := x^{p-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{q-1}{q} \Rightarrow p = \frac{q}{q-1} \Rightarrow p - 1 = \frac{1}{q-1}$
$a \cdot b \leq \int\limits_0^a x^{p-1}dx + \int\limits_0^b y^{q-1}dy = \left[\frac{1}{p}x^p\right]_0^a + \left[\frac{1}{q}y^q\right]_0^b = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

6.2

a) $\kappa_1 = r\cos(\varphi)$, $\kappa_2 = r\sin(\varphi)$ $\kappa_3 = z \Rightarrow \kappa$ stetig da Komponenten alle stetig.
κ ist bijektiv, wenn $(r_1, \varphi_1, z_1) \neq (r_2, \varphi_2, z_2) \Leftrightarrow (r_1\cos(\phi_1), r_1\sin(\phi_1), z_1) \neq (r_2\cos(\phi_2), r_2\sin(\phi_2), z_2)$

$$\left|\begin{array}{rl} z_1 & = z_2 \\ r_1\cos(\phi_1) & = r_2\cos(\phi_2) \\ r_1\sin(\phi_1) & = r_2\sin(\phi_2) \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{rl} r_1^2(\cos(\phi_1)^2 + \sin(\phi_1)^2) & = r_2^2(\cos(\phi_2)^2 + \sin(\phi_2)^2) \\ \cos(\phi_1) & = \cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_1) & = \sin(\phi_2) \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{rl} z_1 & = z_2 \\ \phi_1 & = \phi_2 \\ r_1 & = r_2 \end{array}\right| \text{Also } \kappa \text{ bijektiv.}$$

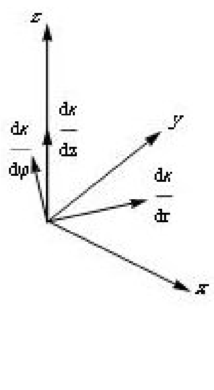
$\forall(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in M \exists (r, \varphi, z) : \kappa((r, \varphi, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$\left|\begin{array}{rl} r\cos(\varphi) & = \tilde{x} \\ r\sin(\varphi) & = \tilde{y} \\ z = \tilde{z} & \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2},\ \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0, y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & y < 0, x = 0 \end{cases}$$

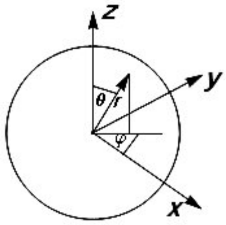
Also Inverse auch stetig.

b) $\frac{\partial}{\partial r}\kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}\kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial}{\partial z}\kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

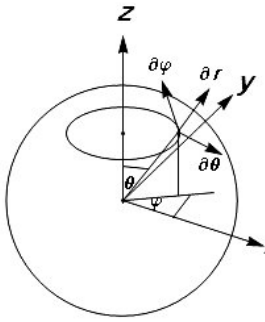


Julian Bergmann
Florian Greiner
Timo Grosch
Julia Welsch

6.3

a) 

$\kappa|_{(0,r]\times[0,2\pi)\times(0\pi)}$ injektiv

b) 

$$I_k(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\kappa_1}{\partial r} & \frac{\partial\kappa_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial\kappa_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\kappa_2}{\partial r} & \frac{\partial\kappa_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial\kappa_2}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\kappa_3}{\partial r} & \frac{\partial\kappa_3}{\partial\varphi} & \frac{\partial\kappa_3}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$< \partial_r\kappa(r,\varphi,\theta), \partial_\varphi\kappa(r,\varphi,\theta) >$
$= -r\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin^2(\theta) + r\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin^2(\theta) + 0 = 0$
$< \partial_r\kappa(r,\varphi,\theta), \partial_\theta\kappa(r,\varphi,\theta) >$
$= r\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + r\sin^2(\varphi)\sin(\theta)\cos\theta - r\sin(\theta)\cos(\theta)$
$= r\sin(\theta)\cos(\theta) - r\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$
$< \partial_\varphi\kappa(r,\varphi,\theta), \partial_\theta\kappa(r,\varphi,\theta) >$
$= -r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + 0 = 0$

6.4

$\Pi^{-1}(i(\Pi(x,y,z))) = \Pi^{-1}(i(\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z})) = \Pi^{-1}((1-z)\frac{1}{x-iy}) = \Pi^{-1}(\frac{(1-z)(x+iy)}{x^2+y^2})$
$= \Pi^{-1}(\frac{(1-z)(x+iy)}{1-z^2}) = \Pi^{-1}(\frac{x+iy}{1+z}) = \Pi^{-1}(\frac{x}{1+z} + i\frac{y}{1+z}) = (x,y,-z)$
$\Rightarrow$ Spiegelung an x,y-Ebene.

6.5

Damit $||.||$ Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist, muss gelten:

1) $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$
2) $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$
3) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

1) Sei $||A|| = 0 \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax||_{\mathbb{R}^m} = 0$

$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 \leq ||Ay||_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{y}{||y||_{\mathbb{R}^n}} = ||A \cdot \frac{y}{||y||_{\mathbb{R}^n}}|| \leq \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax||_{\mathbb{R}^m} = 0$

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : ||Ay||_{\mathbb{R}^m} = 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : Ay = 0 \Rightarrow A = 0$

2) $||\lambda A|| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||\lambda Ax||_{\mathbb{R}^m} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} (|\lambda| \cdot ||Ax||_{\mathbb{R}^m}) = |\lambda| \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax||_{\mathbb{R}^m}$
$= |\lambda| \cdot ||A||$

$$\begin{aligned}
3)\ ||A+B|| &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||(A+B)x||_{\mathbb{R}^m} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax+Bx||_{\mathbb{R}^m}\\
&\leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} \left(||Ax||_{\mathbb{R}^m}+||Bx||_{\mathbb{R}^m}\right) \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax||_{\mathbb{R}^m} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Bx||_{\mathbb{R}^m}\\
&= ||A||+||B||
\end{aligned}$$

$$||Ax||_{\mathbb{R}^n} = \Big|\Big|A\frac{x}{||x||_{\mathbb{R}^n}}||x||_{\mathbb{R}^n}\Big|\Big|_{\mathbb{R}^n} = \Big|||x||_{\mathbb{R}^n}\Big|||A\frac{x}{||x||_{\mathbb{R}^n}}|| \leq ||x||_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||_{\mathbb{R}^n}=1}} ||Ax||_{\mathbb{R}^n} = ||A||\,||x||_{\mathbb{R}^n}$$

6.6

Koordinaten von W: $W = (\cos(50°, 0, \sin(50°))) := (a, 0, b)$
Koordinaten von O: $O = (a\cos(78°), a\sin(78°), \sin(50°)) := (ac, ad, b)$

$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2\left(c^2+d^2\right) + b^2 = 1$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1$
$\frac{W+O}{2} = \left(a\frac{1+d}{2}, \frac{ad}{2}, b\right)$
$\Rightarrow Breitengrad_{max} = \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{\left(a\frac{1+d}{2}\right)^2+\left(\frac{ad}{2}\right)^2}}\right) \approx 56,89°$