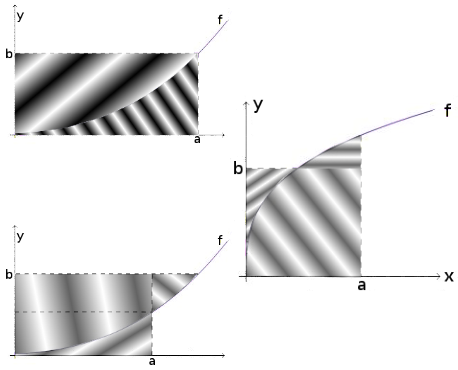
# 6 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 6, zum 28.5.2010

## 6.1




a) Zeige: $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \geq a \cdot b$

Wenn $f(a) = b$,dann gilt $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = a \cdot b$

Wenn $f(a) > b$,dann gilt $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy > a \cdot b$

Wenn $f(a) < b$,dann gilt $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy < a \cdot b$

b) Mit Young und $f(x) = x^{p-1} = y$

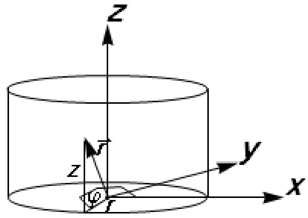
$\Rightarrow f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = \sqrt[p-1]{y}$

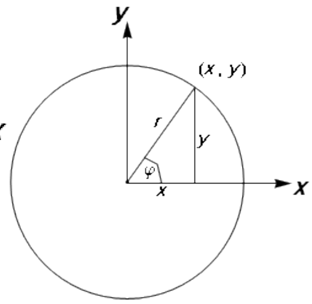
Nach Young gilt: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1} = \frac{p+1-1}{p-1} = \frac{p-1}{p-1} + \frac{1}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \Rightarrow q - 1 = \frac{1}{p-1}$

Substitution bei y: $f^{-1}y) = y^{q-1}$

Nach a) gilt dann $a{\cdot}b \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy = [\frac{1}{q-1+1}x^{p-1+1}]_0^a + [\frac{1}{q-1+1}y^{q+1-1}]_0^b = [\frac{x^p}{p}]_0^a + [\frac{y^q}{q}]_0^b = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

## 6.2




$(x, y)$ :

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos(\varphi)$

$\sin(\varphi) = \frac{y}{e} \Rightarrow y = r\sin(\varphi)$

$$(x, y, z) \in \text{Zylinder mit: } \kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Zeige $\kappa|_{(0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}}$ ist stetig und bijektiv.

$\kappa$ stetig, da alle Komponenten mittels Multiplikation aus stetigen Funktionen auch stetig snd.

(cos, sin, v, z, stetig als Funktion)

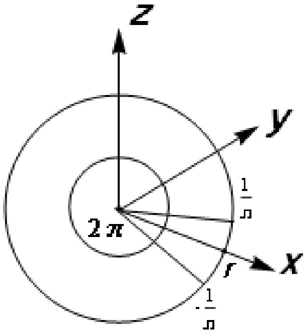
1) $\kappa|_B$ injektiv, weil für $r > 0$ und für $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi), \varphi_1 \neq \varphi_2$ $(r\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1), z) \neq (r\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2), z)$

$\kappa(r, \varphi_1, z) \neq \kappa(r, \varphi_2, z)$

2) $\kappa|_B$ surjektiv, weil für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ ex. mit $\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$\Rightarrow (x, y) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \kappa(r, \varphi)$

Setze: $r := \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \kappa(r, \varphi, z) = (x, y, z)$




Da $\kappa$ stet und bij. existiert eine Inverse $\kappa^{-1}(1, \frac{1}{n}, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1, 0, 0)$

$\kappa^{-1}(1, [2\pi] - \frac{1}{n}, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1, 2\pi, 0)$

wobei $2\pi - \frac{1}{n} \to 2\pi$

obwohl $(1, \frac{1}{n}, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1, 0, 0)$

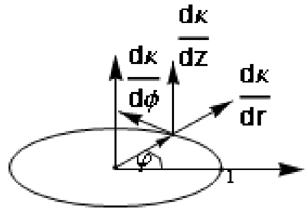
und $(1, -\frac{1}{n}, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1, 0, 0)$ (alles im Bild von $\kappa$)

Da $\phi \in [0, 2\pi)$ ist also $\kappa$ nicht stetig.

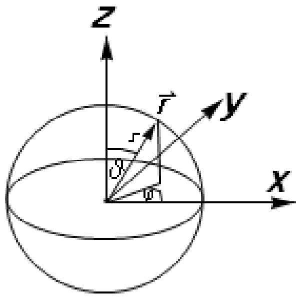
b) $\frac{\partial}{\partial r}\kappa(r, \varphi, z) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$

$\frac{\partial}{\partial \varphi}\kappa(r, \varphi, z) = (-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi), 0)$

$\frac{\partial}{\partial z}\kappa(r, \varphi, z) = (0, 0, 1)$



## 6.3




$$\kappa(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Kugel = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\kappa|_{(0,r]\times[0,2\pi)\times(0,\pi)}$ ist injektiv. $(0,0,0)$ ist Zentrum.

## 6.4

## 6.5

Zeige: $||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ ||x||=1}} \underbrace{||Ax||}_{m\times n\cdot n\times 1=m\times 1}$

$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

Betrachte: $||A+B|| = \sup ||(A+B)x|| \leq \sup(||Ax|| + ||Bx||) \leq \sup(||Ax||) + \sup(||Bx||) = ||A|| + ||B||$

Weiterhin falls $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0$ klar.

$||\lambda A|| = \sup(||(\lambda A)x||) = |\lambda| \sup(||Ax||) = |\lambda| \cdot ||A|| \Rightarrow$ Norm

Für $x \neq 0$: $||Ax|| = ||A\frac{x}{||x||}|| \cdot ||x|| \leq \sup\limits_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^n \\ ||x_0||\leq 1}} (||A\cdot x_0||) \cdot ||x|| = ||A|| \cdot ||x||$

mit $x_0 = \frac{x}{||x||} \Rightarrow ||x_0|| = ||\frac{x}{||x||}||$

## 6.6