7 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 9.6.2010

7.1

a) Wenn Nenner $\neq 0 \Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$ klar.

Sei nun $x = a\cos(\alpha),\ y = a\sin(\alpha) \Rightarrow f(a\cos(\alpha), a\sin(\alpha)) = \frac{a^{\cancel{3}\,1}\cos(\alpha)(\cos^2(\alpha)-3\sin^2(\alpha))}{\cancel{a^2}\underbrace{(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))}_{1}} =$

$a\cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} 0$, da a ein Vorfaktor darstellt, geht die gleichung unabhängig von α gegen 0 für a gegen 0. Dies gilt durch den einfachen Vorfaktor hier sowohl von rechts als auch von links, weswegen f auch in (0,0) stetig ist.

b) $\frac{d}{du}f((0,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f((0,0)+tu) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi)-3\sin^2(\varphi))}{t^3(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))}$
$= \lim_{t\to 0}\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) - 3\sin^2(\varphi))$

Also ist für $\phi = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n\in\mathbb{N}$ der erste Faktor 0 und für $\tan(\varphi) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{N}$ der zweite Faktor 0.

c) Da $\partial_u f(0,0)$ nicht linear, ist f in (0,0) nicht total differenzierbar!

7.2

$div(v) = \frac{d}{dx_1}v_1 + \frac{d}{dx_2}v_2 = \alpha + \alpha = 2\alpha < 0$
Die Divergenz ist in unserem Fall nicht 0, da es sich hier um eine Projektion auf x-y-Ebene handelt und die Komponente $\frac{d}{dx_3}v_3$ außer Acht gelassen wurde. Diese ist positiv und wird vermutlich -2α sein, sodass die Divergenz der Flüssigkeit im 3-Dimensionalen 0 ergibt.

7.3

Sei $u = u(t,x),\ \Phi(\xi) = \Phi(x - ct) = u(t,x)$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}u(t,x) = -c\Phi'(x-ct),\quad \frac{d}{dx}u(t,x) = \Phi'(x-ct)$
$u_t + cu_x = -c\Phi'(x-ct) + c\Phi'(x-ct) = 0$ (Gleichung erfüllt)

7.4

a)

α	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(2,0)	(0,2)
$\alpha!$	1	1	1	1	2	2
$d^\alpha f$	$\frac{x-y}{x+y}$	$\frac{2y}{(x+y)^2}$	$\frac{-2x}{(x+y)^2}$	$\frac{-2(y-x)}{(x+y)^3}$	$\frac{-4y}{(x+y)^2}$	$\frac{4x}{(x+y)^3}$
$d^\alpha f(1,1)$	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5

$\Rightarrow T^2_{(1,1)}f(x,y) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 = -\frac{1}{4}(x-y)(-4+x+y)$

b)

α	(2,1)	(1,2)	(3,0)	(0,3)
$\alpha!$	2	2	6	6
$d^\alpha f$	$4\frac{2y-x}{(x+y)^4}$	$4\frac{y-2x}{(x+y)^4}$	$\frac{-12y}{(x+y)^4}$	$\frac{12x}{(x+y)^4}$
$d^\alpha f(1,1)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\Rightarrow T^3_{(1,1)}f(x,y) = T^2_{(1,1)}f(x,y) + \frac{1}{8}(x-1)^2(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)(y-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^3 + \frac{1}{8}(y-1)^3 = -\frac{1}{8}(x-y)(-6+x^2+y^2)$

7.5

a) „$\Rightarrow$“:

$A \subset U$ rel offen $\Leftrightarrow \exists \tilde{A} \subset X$ offen: $\tilde{A} \cap U = A$
$\tilde{A}, U$ offen in X $\Rightarrow \tilde{A} \cap U = A$ offen in X

„$\Leftarrow$“

A offen in X, $A \subset U$.
$A = A \cap U$, also A rel offen in U.

b) „$\Rightarrow$“:

$A \subset U$ rel abg. $\Leftrightarrow \exists \tilde{A} \subset X$ abg.: $\tilde{A} \cup U = A$
$\tilde{A}, U$ abg. in X $\Rightarrow \tilde{A} \cup U = A$ abg. in X

„$\Leftarrow$“

A abg. in X, $A \subset U$.
$A = A \cup U$, also A rel abg. in U.

7.6

a) $u_t = \sum_{k=1}^{n} a_k'(t) \sin(kx)$
$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 a_k(r) \sin(kx)$
$u_t = u_{xx} \Leftrightarrow a_k'(t) = -k^2 a_k(t)$
$u(t,0) = u(t,\pi) = \sum a_k(r) \sin(k\pi) = 0 = \sum a_k(r) \sin(0) = 0$
$a_k'(t) = -k^2 a_k(t)$, $\frac{da_k}{dt} = -k^2 a_k$, $\frac{da_k}{a_k} = -k^2 dt$
$du|a_k| = -k^2 t + c$, $a_k(t) = w^{-k^2 t} e^c$
$a_k(0) = w^{-k^2 * 0} e^c = e^c$

b) $u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \sin(kx)$, $u_{tt}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k''(t) \sin(kx)$, $u_{xx}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 a_k(t) \sin(kx)$
$\Rightarrow a_k''(t) = -k^2 a_k(t)$, $\quad a_k(t) = \alpha \sin(kt) + \beta \cos(kt)$
$a_k(0) = \beta \Rightarrow a_k(r) = \alpha \sin(kt) + a_k(0) \cos(kt) \;\Rightarrow\; a_k(t) = k\alpha \cos(kt) - k a_k(0) \sin(kt)$
$a_k'(0) = k\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a_k'(0)}{k}$
$\Rightarrow a_k(t) = \frac{a_k'(0)}{k} \sin(kt) + a_k(0) \cos(kt)$