8 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 16.6.2010

8.1

Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beliebige offene Überdeckung von A, A abg. $\Rightarrow\ X\setminus A$ off.
$\Rightarrow \{(U_i)_{i\in\mathbb{N}}, X\setminus A\} = (v_i)$ ist die offene Überdeckung von X und K.
K kompakt $\Rightarrow \exists V_{i_1},...,V_{i_k}$ als endliche offene Überdeckung von K
$(V_{i_1}\cup V_{i_2}\cup ...\cup V_{i_k}\supset K\supset A)$
Also auch $V_{i_1},...,V_{i_k}$ endl. off. Überdecktung von A.
Gilt $\forall j: X\setminus A\neq V_{i_j}$, wird A von endlicher Teilüberdeckung von (U_i) überdeckt.
Gilt $\exists j: X\setminus A\neq V_{i_j}$, so gilt weiterhin $(X\setminus A)\cap A=\emptyset \Rightarrow V_{i_1},...,V_{i_{j-1}},V_{i_{j+1}},V_{i_k}$ ist endliche Teilüberdeckung von A. Also ist A kompakt.
Ist A relativ abg. gilt $\exists\tilde{A}\subset X$ abg: $A=K\cap\tilde{A}\Rightarrow$ A abg.
Ist A abg. gilt mit $C:=A$, dass $C\cap K=A\Rightarrow$ A rel. abg.
Also ist es nicht wichtig, ob abg. oder rel. abg.

8.2

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8xe^{-x^2-4y^2}+-2x(4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}\\ 2ye^{-x^2-4y^2}+-8y(4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-x^2-4y^2}(4x^2+y^2-4)x\\ -2e^{-x^2-4y^2}(16x^2+4y^2-1)y\end{pmatrix}$$

$\nabla f(x,y)=0\Rightarrow(4x^2+y^2-4)x=(16x^2+4y^2-1)y=0\Rightarrow(x,y)_1=(0,0)$
Ist $x=0$, so ist auch $4y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$ möglich.
Ist $y=0$, so ist auch $4x^2=4\Rightarrow x=\pm1$ möglich.
Ist $4x^2+y^2-4=0$, so ist $16x^2+4y^2-1\neq0$, da sonst $4x^2+2y^2-\frac{1}{4}=0$, also $\frac{1}{4}=4$.

$\Rightarrow(x,y)=\{(0,0),(0,\pm\frac{1}{2}),(\pm1,0)\}$
$\partial_x^2 f(x,y)=-2(12x^2+y^2-4)e^{-x^2-4y^2}+4x(4x^3+y^2x-4x)e^{-x^2-4y^2}$
$=e^{-x^2-4y^2}(-2(12x^2+y^2-4)+4x(4x^3+y^2x-4x))$
$=e^{-x^2-4y^2}(-24x^2-2y^2+8+16x^4+4y^2x^2-16x^2)$
$=e^{-x^2-4y^2}(-40x^2-2y^2+8+16x^4+4y^2x^2)$
$\partial_x\partial_y f(x,y)=-4xye^{-x^2-4y^2}+(-16y)(4x^3+y^2x-4x)e^{-x^2-4y^2}$
$=e^{-x^2-4y^2}(-4xy+(16y)(4x^3+y^2x-4x))$
$=e^{-x^2-4y^2}(-4xy+64yx^3+16y^3x-64xy)=e^{-x^2-4y^2}(64yx^3+16y^3x-68xy)$
$\partial_y^2 f(x,y)=-2(16x^2+12y^2-1)e^{-x^2-4y^2}+(16y)(16x^2y+4y^3-y)e^{-x^2-4y^2}$
$=e^{-x^2-4y^2}(-2(16x^2+12y^2-1)+(16y)(16x^2y+4y^3-y))$
$=e^{-x^2-4y^2}(-32x^2-24y^2+2+256x^2y^2+64y^4-16y^2)$
$=e^{-x^2-4y^2}(-32x^2-40y^2+2+256x^2y^2+64y^4)$

$$\Rightarrow Hess_f(x,y)=e^{-x^2-4y^2}\begin{pmatrix}-40x^2-2y^2+8+16x^4+4y^2x^2 & 64x^3y+16xy^3-68xy\\ 64x^3y+16xy^3-68xy & 256x^2y^2-32x^2+64y^4-40y^2+2\end{pmatrix}$$

$Hess_f(0,0)=\begin{pmatrix}8&0\\0&2\end{pmatrix}>0\Rightarrow$ Minima bei f(0,0)=0

$Hess_f(0,\pm\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{15}{2e}&0\\0&-\frac{4}{e}\end{pmatrix}\Rightarrow$ kein Minima/Maxima

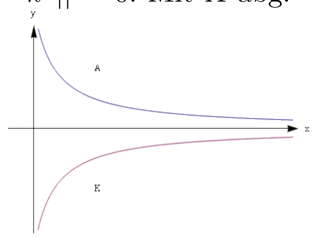
$Hess_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix}-\frac{16}{e}&0\\0&-\frac{30}{e}\end{pmatrix}>0\Rightarrow$ Maxima bei $f(\pm1,0)=\frac{4}{e}$

Es gilt $f(x,y)=0\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$, da $f(x,y)\geq0$.
Also $((0,0),0)$ Strikt globales Minimum.
$\lim_{||(x,y)||\to\infty} f(x,y)=0$
Mit einem δ, sodass$(1,0)\in B(\delta,(0,0))$
und $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^2\setminus\overline{B(\delta,(0,0))}): f(x,y)<f(1,0)\Rightarrow\overline{B(\delta,(0,0))}$ kompakt und besitzt Max und Min $((0,0),(1,0),(0,1))\Rightarrow(\pm1,0)$ globales Maxima.

Julian Bergmann
Florian Greiner
Timo Grosch
Julia Welsch

8.3

Sei $dist(A, K) = 0. \Rightarrow \exists (a_n) \subset A, (k_n) \subset K : dist(a_n, k_n) = ||a_n - k_n|| \to 0$
$(k_n) \subset K$ kompakt $\Rightarrow \exists k_{n_j}$ Teilfolge: $k_{n_j} \to k^* \in K \Rightarrow \lim ||a_{n_j} - k^*|| = 0$. Mit A abg. $\Rightarrow k^* \in A$
Also $k \in A \cap K = \emptyset$ (Widerspruch)
Also $dist(A, K) > 0$
$A := \{(x, y) | x > 0, y = \frac{1}{x}\}, \quad K := \{(x, y) | x > 0, y = -\frac{1}{x}\}$



8.4

Falls $p(z) = a_0 \Rightarrow$ konstant. klar.
Sonst $p(z) = a_n z^n + ... + a_0 : \exists R > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R \Rightarrow |p(z)| \geq \frac{|R_n|}{2} |R|^n$, da $|p(z)| \geq |R|^n (|R_n| - \frac{|R_{n-1}|}{2} + ... - \frac{|R_0|}{|z^n|})$ und mir genügend großen R auch $\frac{|Rn-1|}{R} + ... + \frac{R_0}{|R|^n} \leq \frac{|R_n|}{2}$
Außerdem $\exists R > 0 : |R_n|/2R^n \geq |p(0)| = |R_0| \Rightarrow \overline{B(0, R)}$ kompakt
p stetig $\Rightarrow |p(.)|$ hat Min $\leq |p(0)|$ auf $B(0, R)$.
Also ist $\min\limits_{|z| \leq R} |p(z)| = \min\limits_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \Rightarrow$ Die Funktion hat ein globales Minimum auf $\mathbb{C}$

8.5

$f([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2$ klar.
$$||f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)||_\infty = \left|\left| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(y_2 - y_1) + \frac{y_2^2 - y_1^2 + \sin(x_2) - \sin(x_1)}{12} \\ \frac{1}{3}(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(\cos(y_2) - \cos(y_1)) \end{pmatrix} \right|\right|_\infty$$
$$\leq \left|\left| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}|y_2 - y_1| + \frac{2(y_2 - y_1) + |x_2 - x_1|}{12} \\ \frac{1}{3}|x_2 - x_1| + \frac{1}{2}|y_2 - y_1| \end{pmatrix} \right|\right|_\infty \leq \frac{11}{12} ||(x_2, y_2) - (x_1, y_1)||_\infty$$
$\Rightarrow$ Kontraktion. Also existiert nach Banach genau ein Fixpunkt in $[0, 1]^2$

8.6

a) Nein, da eine Kugel so Definiert ist, dass alle ihre Punkte exakt um den Radius der Kugel vom Mittelpunkt derselben entfernt sind. Also kann der Elefant, dessen „Diagonale" hier $\sqrt{(4m)^2 + (2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{29m^2} \approx 5.385m$ nur in eine Kugel passen, deren Durchmesser so mindestens $\sqrt{29}$ beträgt, unabhängig von der Dimension der Kugel.

b) Die Diagonale eines Quaders berechnet sich aus $d = \sqrt{\sum\limits_{a=1}^{n} a^2}$ mit a: eine Seitenlänge und n: Dimension des Quaders. Für den Einheitswürfel heißt das $d = \sqrt{\sum\limits_{a=1}^{n} 1^2} = 1 \cdot \sqrt{n}$.
Damit der Elefant nun in den Würfel passt, ist $\sqrt{29m^2} = \sqrt{29}m = 0.01m\sqrt{n} \Rightarrow n = 290000$.
Also ist die benötigte Dimension des Einheitswürfels, um den Elefanten fassen zu können n=290000.