7 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 7, zum 9.6.2010

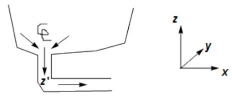
7.1

a) f ste. bei allen $(x,y) \neq (0,0)$: klar (aus stetigen Fu'n zusammengebaut)
Bei $(0,0)$: $|f(x,y)| \leq \frac{|x|(x^2-3y^2)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+3y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| \cdot 3$
Speziell: $|f(x,y)| \to 0 = f(0,0)$ falls $(x,y) \to (0,0)$

b) $\frac{f(tu)}{t} = \frac{t^3\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi)-3\sin^2(\varphi))}{t^2 t(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} = \cos(\varphi)(1-4\sin^2(\varphi)$
($\partial_u f(0,0)$ ex. f.a.u.) $(\partial_u f)(0,0) = 0$, falls $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$, $(u = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)))$

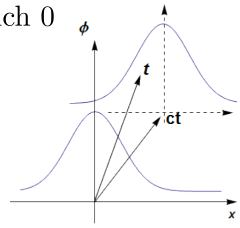
c) $u \mapsto \partial_u f(0,0)$ ist nicht linear $\Rightarrow$ f nicht total dbar.

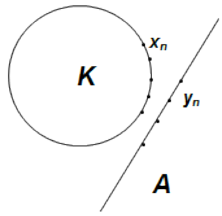
7.2



$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \vec{x}$$

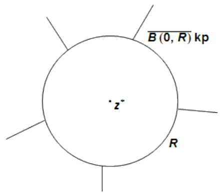
$div(\vec{f}) = 2\alpha < 0$
3. Komponente vernachlässigt! Mit $\frac{d}{dz}\vec{f}z > 0$ ergibt sich 0
Insgesamt: $\frac{d}{dx}\vec{f}_x + \frac{d}{dy}\vec{f}_y + \frac{d}{dz}\vec{f}_z = 0$





7.3

$u_t + cu_x = 0$, $\phi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u(t,x) := \phi(x-ct)$
$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \partial_1 u(t,x) = \phi'(x-ct)(-c)$, $u_x = \phi'(x-ct)$
$(u_t + cu_x)(t,x) = 0$



7.4

a) $f(1,1) = 0$
$\partial_1 f(x,y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$,
$\partial_2 f(x,y) = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$
$\partial_2\partial_1 f(x,y) = 2\frac{(x+y)^2-2y(x+y)}{(x+y)^4} = 2\frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = 2\frac{x-y}{(x+y)^3} = \frac{-2f(x,y)}{(x+y)^2}$
$\partial_1^2 f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}$, $\partial_2^2 f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$

$$(T^2_{(1,1)}f)(x,y) = 0 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$

$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2$
$(\xi = (x-1), \quad \eta = (y-1))$

b) $$(T^3_{(1,1)}f)(x,y) = (T^2_{(1,1)}f)(x,y) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(1,1)}{\alpha!} * (x-1,y-1)^\alpha}_{=:T_3}$$

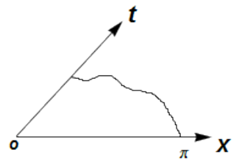
α	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
$\alpha!$	6	2	2	6

$\partial_1^3 f(1,1) = \frac{12}{(1+1)^4} = \frac{3}{4}$
$\partial_2^3 f(1,1) = -\frac{12}{(1+1)^4} = -\frac{3}{4}$
$\partial_1^2\partial_2 f(1,1) = \frac{d}{dy}|_{y=1}(\frac{-4y}{(1+y)^3}) = \frac{1}{4}$
$\partial_1\partial_2^2 f(1,1) = -\frac{1}{4}$
$T_3 = \frac{3}{4\cdot3\cdot2}\xi^3 + \frac{1}{2}\cdot 4\xi^2\eta - \frac{1}{2\cdot4}\xi\eta^2 - \frac{3}{4\cdot3\cdot2}\eta^3 = \frac{1}{8}(\xi^3 + \xi^2\eta - \xi\eta^2 - \eta^3)$

7.5

a) Sei U⊂X offen, A rel offen in U ⇔ A offen in X.
Beweis: „⇒“: Es ex $\tilde{A}$ off in X, $A = \tilde{A} \cap U$. Somit A offen in X. (endlicher Durchscnitt offener Mengen)
„⇐“: A off. in X $\Rightarrow A \cap U$ rel. offen in U (A offen in X)

b) „⇒“: $U \subset X$ abg. $A \subset U$ rel. abg. $\Rightarrow \exists \tilde{A}$ in X abg., $A = U \cap \tilde{A}$.
Da U und $\tilde{A}$ abg. in X, ist A abg. in X (Durchschnitt abg. Mengen)
„⇐“: $A \subset X$ abg. $A = A \cap U$, also A rel abg. (da A abg. in X)



7.6

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\sin(kx)$$

a) $u_t = u_{xx} \Leftrightarrow \sum_k \dot{a}_k(t)\sin(kx) = \sum_k (-k^2 \cdot a_k(t))\sin(kx)$
lin. unabh.$\Leftrightarrow \forall k = 1, ..., n : \dot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t)$ (Koeffizientenvergleich!)
$\Rightarrow a_k(t) = a_k(0) * *e^{-k^2 t}$

b) $u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow \ddot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t) \Rightarrow a_k(t) = \frac{\dot{a_k}}{k}(0)\sin(kt) + a_k(0)\cos(kt)$

8 Hinweise für das neue Blatt 8

1) wichtig! Kompakte menge und abg Teilmenge drin... relativ oder groß? (nicht wichtig.) abg teilm. von kp ist kp (Überdeckung oder Folgenkompaktheit)
3) abg. Menge und kp Menge inf von Abständen >= 0, positiv oder 0? (vermutlich keine 0, aber Grenzwertig !) (Folge damit abstände gegen infimum konvergieren. 2 Folgen. Sei dritte folge von x gegen x^*, widerspr. bei x^* in A!
2) Differenzieren nur, wenn man es muss!
4) Vorbereitung auf Vorlesung... (Idee: großer Kreis mit R, dann höchste Potenz dominant für große R, wenn nicht gerade konstant. in Kreisscheibe genügend große Werte.
5) Ban. Fixpunktsatz. Leicht durch nicht feine Absch. Zeige f(x,y) liegt wieder drin (Selbstabbildung) und kontrahierend. Dann f genau ein Fixpunkt in dem Bereich.
6) Tradition... Elefant ist Quader. Radius 1 cm in hochdimensionalen Kugeln. also isometrische Abbildung (Abstandserhaltung). (Diagonale... Kugel unendlich-Norm-¿ Würfel)