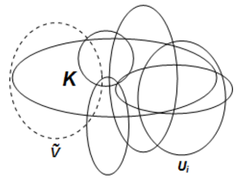
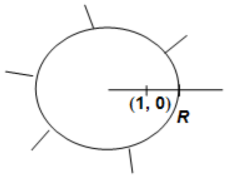
8 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 8, zum 16.6.2010



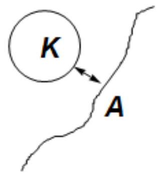
8.1

$K \subset X kp. K \subset X abg.$
Für $A \subset K : A \subset K$ relativ abg $\Rightarrow A \subset X$ abg. (Blatt 7)
Bew. A kp: z.B. Zeige folgenkp:
Sei $(x_n) \in A$ Folge. Da K Folgenkp. ex konv. Teilfolge $(x_{\varphi(x)} \subset (x_n)$ mit $\lim x^* \in K$.
Da A abg, ist $x^* \in A$. Somit A folgenkp, A kp.
(In metr. Räumen äquivalent)
Oder: Sei $(U_i)_{i \in I}$ off Ü von A. Setze $V := K \setminus A$. V relativ offen in K, da $A \in K$ abg.
Es ex. $\tilde{V} \subset X offen, V = K \cap \tilde{V}$.
$(U_i)_{i \in I}$ zusammen mmit $\tilde{V}$ bilden off Ü von K.
Da K kp, ex $i_1, ..., i_n \in I$: $K \subset U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \cup \tilde{V}$
Es folgt, da $V \cap A = \emptyset : A \subset U_{i_1} \cup, ..., \cup U_{i_n}$



8.2

$f(x, y) \geq 0 \forall (x, y), \quad f(0, 0) = 0 \Rightarrow$ bei (0,0) globales Min.
Für Extrema: $\nabla f(x, y) = 0 = \big((8x - 2x(4x^2 + y^2))exp(...), (2y - 8y(4x^2 + y^2))exp(...)\big)$
Also $x(4 - 4x^2 - y^2) = 0$ und $y(1 - 16x^2 - 4y^2) = 0$
Lösungen: $x = y = 0; \quad x = 0, y = \pm\frac{1}{2}; \quad x = \pm$
Falls $x \neq 0 \neq y : 4x^2 + y^2 = 4, \quad 4x^2 = 4 - y^2, \quad 16x^2 = 16 - 4y^2$ und $1 - (16 - 4y^2) - 4y^2 = 0$ nicht erfüllbar.
$\lim\limits_{||(x,y)|| \to \infty} |f(x, y)| = 0$, Also ex $R > 1$ mit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||(x, y)||_2 \geq R : |f(x, y)| < f(1, 0) = 4e^{-1}$
$Hess_f(0, \pm\frac{1}{2}) = e^{-1} \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ indefinit, kein Extremum.
Folgt: $\max\limits_{||(x,y)||_2 \leq R} |f(x, y)$ ist globales Max. von f. ($||(x, y)||_2 \leq R$ ex., ste Fu auf der kp Menge $\overline{B(0, R)}$
Also: $f(\pm 1, 0) = 4^{-1}, \ f(0, \pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{-1}$
Folgt: globales Maximum bei $(\pm 1, 0)$



8.3

$dist(K, A) := inf\{d(x, y) | x \in K, y \in A\} > 0$
Annahme: $dist(...) = 0$. Dann ex. Folgen $(x_n) \subset K$, $(y_n) \subset A$ mit $d(x_n, y_n) \to 0$
Da K kp (folgenkp), ex konv Teilf $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$ mit limes $x^* \in K$
Es gilt $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \to 0$, also $y_{\varphi(n)} \to x^*$. Da A abg, ist $x^* \in A$
Somit $x^* \in A \cap K$. Wid zu $A \cap K = \emptyset$
Beispiel: $A_1 := \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, \quad A_2 = \{(x, e^{-x} | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
A_1, A_2 abg. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $dist(A_1, A_2) = 0$

8.4

Falls $n \geq 1$, so $\lim\limits_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty$ (!)
Also ex. $R > 1$ mit $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R : |p(z)| > |p(0)|$
Folgt $\min\limits_{z, |z| \leq R} |p(z)|$ ist globales Min von $|p|$ $(z, |z| \leq R$ ex, da $|p|$ ste Fu auf kp Menge $\overline{B(0, R)}$)
Zu (!): $p(z) = z^n(A_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_n}{z})$ mit $a_n \neq 0$.
Wähle $R > 1$ mit $\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} |a_j|}{R} \leq \frac{|a_n|}{2}$

Dann für $z \in \mathbb{C}, |z| \geq R : |p(z)| \geq |z|^n(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - ... - \frac{|a_n|}{|z|}) \geq |z|^n(|a_n| - \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|}{|z|}) \geq |z|^n(|a_n| - \frac{\sum ...}{R}) = |z|^n \frac{|a_n|}{2}$
(Für $|z| \geq \tilde{R} \geq R : |p(z)| \geq \tilde{R}^n \frac{|a_n|}{2}$)

8.5

$Q := [0,1]^2$, $f(Q) \subset Q$ (leicht zu zeigen)
$f(x,y) - f(ttx, tty) = \left(\left\| \begin{matrix} \frac{2}{3}(y - \tilde{y}) + \frac{y^2 + \sin(x) - \tilde{y}^2 - \sin(\tilde{x})}{12} \\ 1/3(x - ttx) + \frac{\cos(y) - \cos(\tilde{y})}{2} \end{matrix} \right\| \right)_\infty$
$|1.komp| \leq \frac{2}{3}|y - \tilde{y}| + \frac{|y-\tilde{y}||y+\tilde{y}|}{12} + \frac{|x-\tilde{x}|}{12} \leq (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})|y - \tilde{y}| + \frac{1}{12}|x - \tilde{x}| \leq \frac{11}{12}||(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})||_\infty$
$|2.komp| \leq (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})||(,) - (,)||_\infty \leq \frac{10}{12}$
Also f bzgl. $||.||_\infty$ kontrahierend (kontraktionskonstante $\frac{11}{12}$
Nach Banachser Fixpunktssatz ex. genau ein Fixpunkt. Erhaltbar durch wiederholte Anwendung von f.

8.6

$E = [0,400] \times [0,200] \times [0,300]$

a) $\overline{\text{Würde es } i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n \text{ geben, mit } \forall x \in \mathbb{R}^3 : ||i(x) - i(y)||_{2,n} = ||x - y||_{2,3} \text{ und } i(E) \subset}$ $B_{||.||_{2,n}}(0,1)$
Dann wäre $||i(0,0,0) - i(400,0,0)||_{2,n} = 400 \leq 2$, Wid.

b) Setze $n := 200^2 + 300^2 + 400^2$,
$\xi := (\underbrace{1,...,1}_{400^2 mal}, \underbrace{0,...,0}_{200^2+300^2 mal}) \in B_{||.||_{\infty,n}}(0,1)$
$\eta := (\underbrace{0,...,0}_{400^2 mal}, \underbrace{1...,1}_{200^2 mal}, \underbrace{0,...,0}_{300^2 mal}) \in B_{||.||_{\infty,n}}(0,1)$
$\zeta := (\underbrace{0,...,0}_{400^2+200^2 mal}, \underbrace{1...,1}_{300^2 mal}) \in B_{||.||_{\infty,n}}(0,1)$
Def $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n, i(x,y,z) := x\frac{\xi}{||\xi||_{2,n}} + y\frac{\eta}{||\eta||_{2,n}} + z\frac{\zeta}{||\zeta||_{2,n}}$
(i ist isometrisch.)$\Rightarrow i(R) \subset \overline{B_{||.||_{\infty,n}}(0,1)}$

9 Hinweise zum neuen Blatt 9

1) einfacher spezialfall 2x2 Matrizen. (indefinit: pos und neg EW, bzw einer 0 wenn pos oder neg definit) $< x, Ax >=< (x1,x2), A(x1,x2) >= l1x1^2 + l2x2^2$ (3D Grad, oben $q_a(x)$, Rest überlegen (Variable 0 setzen)
2) ähnlich 1. nur nicht immer Fu. 2b) ist schon graph. sonst immer Schnitte ansehen (mit ebenen) (hyperboloide etc.).
3) Torus, also um R radius r mit Rotation (Donut) (schöne mannigfaltigkeit, 2dim umft, grad idR nicht 0! wenn r=R passt nur noch Gerade durch Torusmitte, dort dann keine mannigfaltigkeit, grad=0.
4) Doppelkegelmantel: defs anschauen, also hyperebene. Nullpunkt krankhaft. Dort angentialraum wieder kegelfläche. nicht mannigfaltig)
5) kepplerproblem. kp heißt beschr und abg. abg ist erfüllt. Nullpunkt ist nicht Teil Definition! Grenzwert nicht in Def, also nicht kp. außerhalb r gilt:wann beschr?
6) doppelmuldenpotential: bei 0 neg parabel, weiter weg nach oben geöffnet. Niveaumenge skizzieren. Meisten untermannigfalt, paar krankhaft!