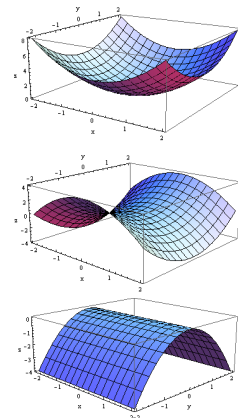


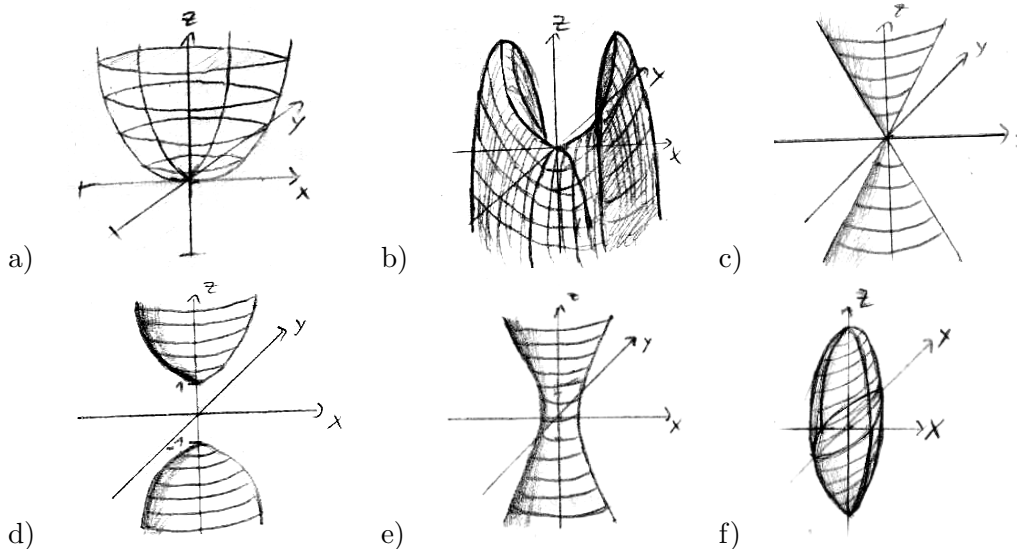
9 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 23.6.2010

9.1

- i) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (also positiv definit)
- ii) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ (also indefinit)
- iii) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$
 (also negativ semidefinit aber nicht negativ definit)



9.2



9.3

a) $g(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r$

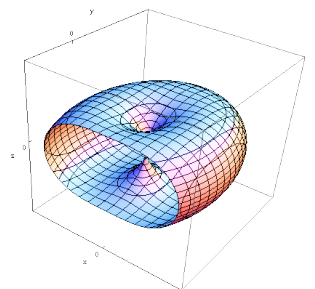
$$\nabla g = \begin{pmatrix} (\sqrt{x^2 + y^2} - R) \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - R) \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z=0, x=y=0, \text{ oder } x^2 + y^2 = R.$$

$x^2 + y^2 = R$ nicht möglich.

$r^2 < R^2$ und $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 0$. Also $\nabla g \neq 0, (0, 0, 0) \notin T$

$\forall p \in M \exists$ offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^n$, mit $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-k})$, da $M \cap W = f^{-1}(\{0\})$ und $\nabla f_1(p) \dots \nabla f_n - k(p)$ l.u.

- b) $\nabla g = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \notin T. \Rightarrow \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = R\} \not\subset T.$
 \Rightarrow ist nicht möglich, da $(0, 0, 0) \notin T$



9.4

Sei $p \in M, \gamma$ Kurve in M mit $\gamma(0) = (0, 0, 0), \gamma$ dbar. bei 0.

Falls $p = (0, 0, 0)$ und $\dot{\gamma}(0) = (\dot{\gamma}_x(0), \dot{\gamma}_y(0), \dot{\gamma}_z(0))$, so für $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) \notin M \Rightarrow T_{(0,0,0)}M \subset M$.

Sei nun $p = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ in der Nähe von p ist M 2-dim-Mft. von \mathbb{R}^3 , also $T_pM \subset$ Unterraum von $\mathbb{R}^3, \dim(T_pM) = 2$,

mit $\gamma_0(t) = (1+t)p \subset M, \dot{\gamma}_0(0) = p \subset T_pM$

Ist $x = |z| \cos(\varphi), y = |z| \sin(\varphi)$, so ist mit $\gamma_1(t) = (|z| \cos(\varphi+t), |z| \sin(\varphi+t), |z|) \in M : \gamma_1(0) = p, \dot{\gamma}_2(0) = (-y, x, 0) \in T_pM \Rightarrow T_pM = \mathbb{R} \times \oplus \mathbb{R} \times (-y, x, 0)$

9.5

a) Sei (a_n) Nullfolge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann $E_0 + \frac{M\gamma}{\|a_n\|_2} > 0$.

Sei nun b_n in \mathbb{R}^3 . so, dass $\|b_n\|_2 = \sqrt{\left(\frac{E_0}{m} + \frac{M\gamma}{m} \frac{1}{\|x_n\|_2}\right)^2}$.

Dann $(a_n, b_n) \in F_{E_0}$, aber $a_n \rightarrow 0$, $\|b_n\|_2 \rightarrow \infty$

Also F_{E_0} für kein $E_0 \in \mathbb{R}$ kompakt.

b) Nach Heine-Borel: \tilde{F}_{E_0} kp. $\Leftrightarrow \tilde{F}_{E_0}$ beschr. ung abg.

$(a_n, b_n) \subset \tilde{F}_{E_0}$, $(a_n, b_n) \rightarrow (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$, also $\|\tilde{x}\|_2 \geq R$ und $\frac{1}{2}m\|\tilde{v}\|_2^2 - mM\gamma\frac{1}{\|\tilde{x}\|_2} =$

$\lim \frac{1}{2}m\|b_n\|_2^2 - mM\gamma\frac{1}{\|b_n\|_2} = E_0$, also $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{F}_{E_0}$. Daher \tilde{F}_{E_0} abg.

$\forall E_0 \geq 0$: $\forall x, \|x\|_2 \geq R \exists v$: $\frac{1}{2}m\|v\|_2^2 = E_0 + \frac{mM\gamma}{\|x\|_2}$

$\Rightarrow \tilde{F}_{E_0}$ nicht kp.

$\forall E_0 < 0$: $\forall x \forall v \in F_{E_0}$: $\frac{mM\gamma}{\|x\|_2} = \frac{1}{2}m\|v\|_2^2 + |E_0| \geq |E_0|$

$\Rightarrow R \leq \|x\|_2 < \frac{mM\gamma}{|E_0|}$: \tilde{F}_{E_0} kp.

Also F_{E_0} kp für alle E_0 kleiner 0

9.6

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} - x^2 + x^4$$

$$E(x, y) = c \Rightarrow v = \pm \sqrt{2(c + x^2 - x^4)} \quad (\text{für } c=0 \text{ also } v = \pm \sqrt{2x^2 - 2x^4})$$

Für $c = -\frac{1}{4}$ ist $M_c = \{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$, also keine C^1 -Umft

Für $c \in (-\frac{1}{4}, 0)$ ist $(x, v) \in M_c$, also $\frac{v^2}{2} - x^2 + x^4 = c$

Dann $\nabla E(x, v) = (-2x + 4x^3, v)$. Ist $c=0$, dann $(0, 0) \in M_0$ und M_0 in Umgebung von $(0, 0)$. Dort kreuzt sich allerdings der Graph, also ist dieser für x oder v nicht umsetzbar.

Daher kein Umft.

Ist $c > 0$, so ist $(x, v) \in M_c$, also Umft.

Also ist M_c für alle $c \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$ eine Umft. von \mathbb{R}^2

