1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 3 21.11.12

1.1 Aufgabe

Numerik 1 Blatt 3 Julian Bergmann

Nr. 1

LR-Zerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 5 & -5 & 0 \\ 5 & 10 & 5 & -6 \\ -5 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \quad \left(l_{12} = \frac{1}{5},\ l_{13} = -\frac{1}{5},\ l_{14} = 0 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \quad \left(l_{23} = \frac{2}{3},\ l_{24} = -\frac{2}{3} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \left(l_{34} = \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{L}\tilde{L}^T$-Zerlegung:

1. A symmetrisch : $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow$ erfüllt
2. A pos. definit : EW pos u. Reell

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \mathbb{1}\lambda) = -6\big((25-\lambda)\cdot 5\cdot 2 + (-5)(-6)\cdot 5 - (25-\lambda)(9-\lambda)(-6) - 5(-5)\cdot 2\big)$$
$$-2\big((25-\lambda)(10-\lambda)\cdot 2 + 5\cdot(-6)(-5) - (25-\lambda)\cdot 5\cdot(-6) - 5\cdot 5\cdot 2\big)$$
$$+22\big((25-\lambda)(10-\lambda)(9-\lambda) + 5\cdot 5\cdot(-5) + 5\cdot 5\cdot(-5)$$
$$-(25-\lambda)\cdot 5\cdot 5 - (-5)(10-\lambda)(-5) - (9-\lambda)\cdot 5\cdot 5\big)$$
$$= \lambda^4 - 66\lambda^3 + 1418\lambda^2 - 10196\lambda + 8100$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \approx 0{,}9;\ \lambda_2 \approx 13{,}7;\ \lambda_3 \approx 23{,}5;\ \lambda_4 \approx 27{,}9 \Rightarrow \text{erfüllt}$$

$\tilde{l}_{11}^2 = a_{11} = 25 \Rightarrow \tilde{l}_{11} = 5$ $\qquad$ $\tilde{l}_{21}\tilde{l}_{11} = a_{21} = 5 \Rightarrow \tilde{l}_{21} = 1$

$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{11} = a_{31} = -5 \Rightarrow \tilde{l}_{31} = -1$ $\qquad$ $\tilde{l}_{21}^2 + \tilde{l}_{22}^2 = a_{22} = 10 \Rightarrow \tilde{l}_{22} = 3$

$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{21} + \tilde{l}_{32}\tilde{l}_{22} = a_{32} = 5 \Rightarrow \tilde{l}_{32} = 2$ $\qquad$ $\tilde{l}_{41}\tilde{l}_{11} = a_{4} = 0 \Rightarrow \tilde{l}_{41} = 0$

$\tilde{l}_{41}\tilde{l}_{21} + \tilde{l}_{42}\tilde{l}_{22} = a_{42} = -6 \Rightarrow \tilde{l}_{42} = -2$ $\qquad$ $\tilde{l}_{32}^2 + \tilde{l}_{31}^2 + \tilde{l}_{33}^2 = a_{33} = 9 \Rightarrow \tilde{l}_{33} = 2$

$\tilde{l}_{41}\tilde{l}_{31} + \tilde{l}_{42}\tilde{l}_{32} + \tilde{l}_{43}\tilde{l}_{33} = a_{43} = 2 \Rightarrow \tilde{l}_{43} = 3$ $\qquad$ $\tilde{l}_{41}^2 + \tilde{l}_{42}^2 + \tilde{l}_{43}^2 + \tilde{l}_{44}^2 = a_{44} = 22 \Rightarrow \tilde{l}_{44} = 3$

$$\Rightarrow \tilde{L} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vergleich:

Spalten von $\tilde{L}$ dividiert durch jeweiliges Diagonalelement ergibt L.

Zeilen von $\tilde{L}^T$ multipliziert mit jew. Diagonalelement ergibt R.

pos. definitheit auch mit Herwitz-Kriterium:

Zwischen L und $\tilde{L}$ besteht die folgende Beziehung:
$\tilde{L} = LD^{1/2}$, wobei $D^{1/2} = (diag(r_i, i))^{1/2}$
Damit erhalten wir eine weiter eindeutige Zerlegung:
$A = LDL^T$ bzw. für nicht symm. Matrizen:
$A = LDU$ wobei U rechte obere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Diagonale ist.

1.2 Aufgabe

a) $det(A) = 0.9999 > 0$, Pivotelement$a_{33} = 4$

$$\tilde{A}^{(0)} = P_0 A Q_0$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.0001 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1.0001 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^{(0)} = P_0 b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1.0001 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -0.4999 & -0.25 & \\ 0 & 0.5 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -0.4999 & -0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.4999 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9998 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.4999 & -0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.49995 \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -0.9998 & 1 \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution ergibt:
$\tilde{x} = (0.9999 \ , \ 1.0001 \ , \ 1.9998)$
Lösung:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9998 \\ 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.001 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1.0001 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 1 & 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.999 & -0.0001 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -1.00010001 \cdot 10^{-4} & 1.00010001 & -0.500050005 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.00010001 \cdot 10^{-4} & 1.00010001 & -0.500050005 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1.99979998 & -2.00020002 & 2.00010001 \\ 0 & 1 & 0 & 1.00010001 & -1.0001001 & 0.500050005 \\ 0 & 0 & 1 & -1.00010001 * 10^{-4} & 1.00010001 & -0.500050005 \end{array}\right)$$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}| = 1.99979998 + 2.00020002 + 2.00010001 = 6.00010001$

$\|A\|_\infty = 1 + 2 + 4 = 7$

$cond_\infty(A) = 7 \cdot 6.00010001 = 42.00070007$

$Ax = b + \delta b$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.0001 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.998 \\ 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \delta A = 0$

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{cond_\infty(A)}{\underbrace{1 - cond_\infty(A)\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}_{=0}} \cdot \left(\underbrace{\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}_{=0} + \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right) = 1.05 \cdot 10^{-7}$$

1.3 Aufgabe

$cond(A)$:

$$\det(A'A - x\,E) = \begin{vmatrix} 2 - x & 3 \\ 3 & 5 - x \end{vmatrix} = x^2 - 7x + 1 = (x - \tfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2})(x - \tfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2})$$

$\Rightarrow cond_2(A) = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \approx 0.8541$

- A fest, d.h. nicht gestört, $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0$, b fehlerhaft: $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} > 0$
  Für den rel. Fehler gilt:
  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq cond_2(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$
  Mit der berechneten Konditionszahl genügt es, dass gilt:
  $\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} < \frac{10^{-2}}{cond_2(A)} \approx 1.459 \cdot 10^{-3}$
  um sicherzustellen, dass $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} < 10^{-2}$
- A bis auf rel. Fehler $\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} < 10^{-3}$ bekannt. Gilt Prop. 2.2.3:
  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{cond_2(A)}{1-cond_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}} \left(\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} + \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}\right) < \frac{cond_2(A)}{1-cond_2(A)\cdot 10^{-3}} \left(\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} + 10^{-3}\right)$
  $\approx 6.8541 \left(\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} + 10^{-3}\right)$
  $\Rightarrow \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} < \frac{1}{6.5841} \left(10^{-2} - 6.8541 \cdot 10^{-5} - 6.8541 \cdot 10^{-3}\right) \approx 1$
  D.h. der Messfehler für b darf max $1.358 \cdot 10^{-2}$ betragen, damit die Lösung eine Genauigkeit von 10^{-2} besitzt.

1.4 Algorithmus Potenzmethode mit Normierung

1. Startvektor $x^{(0)}$ suchen (z.B: Einheitsvektor).
   Setze k=1
2. $y^{(0)} := x^{(0)}$ und berechne $x^{(1)} = Ay^{(0)}$
3. Normiere $(z.B. \|.\|_2,\ \|.\|_\infty)$ und berechne $y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$
   Berechne damit $x^{(k+1)} = Ay^{(k)}$
4. Liegen die Quotienten
   $\delta_i = \left|\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}\right|$ für $i = 1, ..., n$
   nahe genug bei 1(z.B. im Interval $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ als Fehlerschranke), dann goto 5, ansonsten setze $k := k+1$ und goto 3
5. Für den betragsmäßig größten Eigenwert gilt nun:
   $\lambda = \frac{x_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$ (bzw. arithm. Mittel von $i = 1, ..., n$
   Formel: $\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$
   Verzichtet man in Schritt 2 auf Normierung, dann erhält man λ durch
   $\lambda = \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}$(bzw. arithm Mittel $i = 1, ..., n$)
   Formel: $\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}$
   Allerdings betrachte dann in Schritt 4 die Quotienten
   $\frac{x_l^{(k+1)}}{x_l^{(k)}}, \quad i = 1, ..., n$
   als Nährung für λ und goto 5, falls diese QUotienten möglichst nahe beeinander, sonst $k := k+1$, goto 3