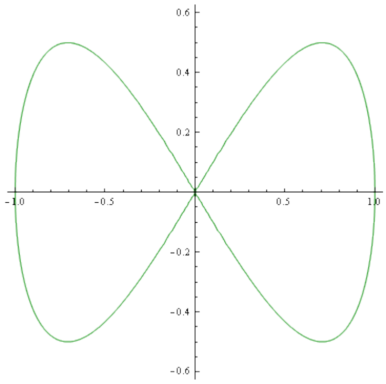
Analysis Tutorium vom 21.6.2010

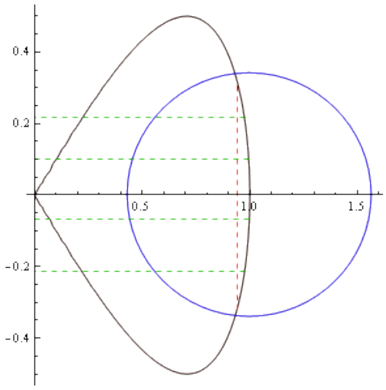


Implizierte Funktionen

Gegeben sei die Abb. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$
Wir betrachten die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R} | f(x,y) = 0\}$ („Niveaumenge“).
Diese Niveaumenge sieht wiefolgt aus:

Offensichtlich ist der Graph dieser Niveaumenge keine Funktion.
Aber kann ich vielleicht lokal Punkte finden, so dass sich dort die Niveaumenge als Graph einer Funktion darstellen lässt?

1) Betrachte eine Umgebung um den Punkt (0,0). Kann ich hier eine expliziete Auflösung nach x oder y finden? Kann ich Funktionen g oder h finden, so dass y=g(x) oder x=h(y) gilt?
   Offensichtlich kann man weder eine Auflösung nach x, noch nach y finden.
   Wir berechnen (rein interessehalber) noch die partiellen Ableitungen von f in (0,0):
   $J_f = Df(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x - 4x^3, -2y) \quad \Rightarrow Df(0,0) = (0,0)$



2) Betrachte eine Umgebung um den Punkt (1,0).
   Offenbar gibt es keine Auflösung nach y, aber man kann nach x auflösen, da einem Punkt auf der y-Achse nur ein Punkt auf der Niveamenge zugeordnet wird, der innerhalb der Umgebung von (1,0) liegt.
   Spaßeshalber berechnen wir wieder die part. Ableitungen im Punkt (1,0):
   $Df(1,0) = (2x - 4x^3, -2y)|_{(1,0)} = (2,0)$
3) Umgebung (-1,0) $\Rightarrow$ Auflösen nach x möglich, jedoch nicht nach y.
   $Df(-1,0) = (2,0)$

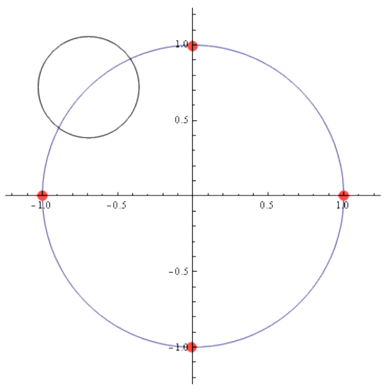
11.1 Satz über impl. Funktionen

Vorraussetung: $k, l \in \mathbb{N}, M \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ offen, $R : M \to \mathbb{R}^l$ stetig, $D_2 f$ ex. auf M und sei stetig, es ex. $(x_0, y_0) \in M$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $l(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to D_2 f(x_0, y_0)$ isomorph
($\Leftrightarrow D_2 f$ invertierbar$\Leftrightarrow \det(D_2 f) \neq 0$)
Dann gilt:

a) Es ex. offene Umgebung $U \in \mathbb{R}^k$ um x_0 und $V \in \mathbb{R}^l$ um y_0, sowie eine Fkt. $y \in C^0(U,V)$, so dass gilt:
   $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \forall (x,y) \subset U \times V$ (insbesondere ist $y_0 = g(x_0)$)

$x \in \mathbb{R}^k \quad (x_1, ..., x_k), \qquad y \in \mathbb{R}^l \quad (y_1, ..., y_l), \qquad f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$

$$Df = J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times (r+l)} \qquad (D_1 f \text{ und } D_2 f)$$



Beispiel 1

Gegeben sei $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ für $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Betrachte die Niveaumenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\}$. Untersuchen Sie diese Neviaumenge auf eine explizite Auflösung nach x oder y.
Betrachte daher $D_1 f$ und $D_2 f$:
$Df(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (D_1 f, D_2 f) = (2x, 2y)$
Mit anderen Worten:
Für welche x (bzw. y) ist $D_1 f($ bzw. $D_2 f)$ nicht singulär?
Antwort: $\forall x \in (-1,1)$ (bzw. $y \in (-1,1)$, denn für $y = \pm 1$ ist $x = 0$)

Beispiel 2: Klausuraufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y_1, y_2) = (x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7, xy_1 + y_2 + xy_2 + 2)$ in der Nähe der Nullstelle $(2, -1, 0)$ auf ihre Auflösbarkeit nach y_1, y_2.

Analysis Tutorium vom 28.6.2010

Besprechung Beispiel 2 vom 21.6

Untersuchen Sie die Fkt. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y_1, y_2) = (x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7, xy_1 + y_1y_2 + xy2 + 2)$ in der Nähe der Nullstelle (2,-1,0) auf ihre Auflösbarkeit nach y_1, y_2.
Wir bilden die „pariell totale Ableitung“ $D_y f$ in der die partiellen Abl. nach y_1, y_2 stehen:
$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ mit $D_y f$
$(D_y f)|_{(2,-1,0)} = \left.\begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & y_1 + x \end{pmatrix}\right|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$det[(D_y f)|_{2,-1,0}] = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \neq 0 \Rightarrow D_y f$ ist in $(2, -1, 0)$ invertierbar.
$\Rightarrow$ Satz über imp. Fu. für ein hinreichend kleines offenes Intervall I um den Punkt $x = 2$ existieren zwei C^1-Funktionen $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $(g_1(x = 2), g_2(x = 2)) = (-1, 0)$ sowie $f_1(x, g_1(x), g_2(x)) = 0 = f_2(x, g_1(x), g_2(x))$

Beispiel 1

Zeigen Sie, dass die Fu. $g[2, 3] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{3}|x - \frac{5}{2}| + 2$ genau einen Fixpunkt im Intervall $[2, 3] \subset \mathbb{R}$ hat.
Banachscher Fixpunktsatz: Sei (X,d) vollständig metrischer Raum und $f : X \to X$ kontrahierend, d.h. es ex. $K \in [0, 1]$, so dass gilt:
$(*)\quad d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \forall x, y \in X$
Dann hat f genau einen Fixpunkt, d.h. es ex. $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$
$[2, 3] \subset \mathbb{R}$ ist sicher vollständig als kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$
z.Z. es ex. $K \in [0, 2]$, so dass $d(g(x), g(y)) \leq K d(x, y)\ \forall x, y \in [2, 3] \Leftrightarrow |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ (da $||.||$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induziert)
Sei $x, y \in [2, 3]$. Dann Gilt $|g(x) - g(y)| = \left|\frac{1}{3}|x - \frac{5}{2}| + 2 - |y - \frac{5}{2}| - 2\right| = \frac{1}{3}||x - \frac{5}{2}| - |y - \frac{5}{2}||$
$= \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} x - \frac{5}{2} - y + \frac{5}{2} \\ -x + \frac{5}{2} + y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}|x - y|$
Gilt: $d(x, y) = |x - y|$ Also: $d(g(x), g(y)) = \frac{1}{3}|x - y| \leq K|x - y|$ Für $K = \frac{1}{3}$

Extrema unter Nebenbedingungen (M3)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x, y, z) = x + y + z$
Hat f auf $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ein Min. und ein Max? Wenn ja, bestimmen Sie dieses.

Satz 13.3: Lagrange-Multiplikatoren
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \{1, ..., n - 1\}, f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $g = (g_1, ..., g_{n-k}) \in C^1(D, \mathbb{R}^{n-k})$.
Sei $M = g^{-1}(\{0\})$ und $p \in M$. Ferner gilt:

a) p ist lok. Extrema von f unter NB g=0
b) $\nabla g_1(p), ..., \nabla g_{n-k}(p)$ sind l.u., g.h. $J_g(p)$ hat max. Rang

Dann ex. eindeutige $\lambda_1, ..., \lambda_{n-k} \in \mathbb{R} mit \nabla f(p) = \sum_{i=1} \lambda_i \nabla g_i(p)$

Lösung:
f ist stetig und $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ kp.$\Rightarrow$ f nimmt Min/Max auf S^2 an!
Setze $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$, Dann gilt $M = S^2 = g^{-1}(\{0\})$
Wir suchen Min/Max, Kern(f) unter der Neben-Bedingung y=0
$\nabla g(x,y,z) = J_g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$
Für welche Punkte hat $J_g(p)$ max. Rang?
Gilt: $J_g(x,y,z)$ hat nur für $(0,0,0)$ nicht max. Rang, aber $(0,0,0) \notin S^2$, genügt nicht der NB.
(*) es ex $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) - \nabla(x+y-z) = (1,1,-1) \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} 1 & = \lambda \cdot 2x \\ 1 & = \lambda \cdot 2y \\ -1 & = \lambda \cdot 2z \end{array} \right| \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = -\frac{1}{2\lambda}$$

Außerdem muss (x,y,z) den NB genügen, als muss gelten $(\frac{1}{2\lambda})^2 + (\frac{1}{2\lambda})^2 + (-\frac{1}{2\lambda})^2 = 1$
$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ einsetzen in $(\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}, -\frac{1}{2\lambda})$ ergibt $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}) = p_{1,2}$
$\Rightarrow f(p_{1,2}) = \pm\sqrt{3}$, also ist p_1 Max und p_2 Min.

Analsysis Tutorium vom 5.7.2010

Beispiel 1

Untersuchen Sie die Funktion f:$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1y_2 + xy_2 + 2 \end{pmatrix}$
In der Nähe der Nullstelle (2,-1,0) ist ihre Auflösbarkeit noch (y_1, y_2).

Klausurrelevanz

Übungsaufgaben

B7	A1	WDH: Stetigkeit, partielle/totale Differenzierbarkeit
B7	A4	Taylor
B8	A2	Extrema
B8	A5	Banachscher Fixpunktsatz
B9	A2	Vektorfelder zeichnen
B9	A3	Untermannigfaltigkeiten
B9	A4	T_pM & Untermannigfaltigkeiten
B9	A5	Kompaktheit
B9	A6	Nievaumengen, Untermannigfaltigkeiten

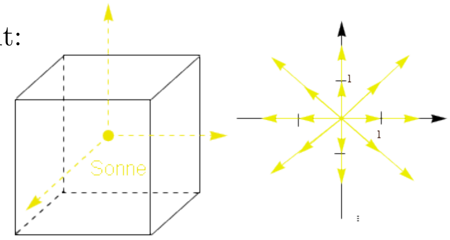
Wichtige Punkte im Skript

9.1	Überdeckungseigenschaften
9.6	stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt
9.7	stetige Funktionen auf kompakten Mengen...
9.8	Folgenkompaktheit
9.10	Heine-Borel
10.1	Banachscher Fixpunktsatz
11.1	Satz über implizierte Funktionen
(11.3)	Satz über lokale Invertierbarkeit
12.1	Immersion
12.2	Tangentialraum
12.4	Untermannigfaltigkeiten
13.3	Extrema unter Nebenbedingungen (Lagrange-Multiplikatoren)
14.12	Transformationsformel
16.3	Beispiele zum Oberflächenintegral
17.2 c)	äußerer Normalvektor
17.10	Gaußscher Integralsatz

Gaußscher Integralsatz

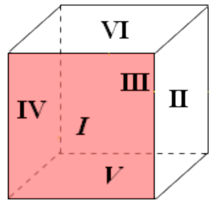
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U,\mathbb{R})$, $K \subset U$ kp mit glatten Rand, dass gilt:

$$(A) \qquad \underbrace{\int\limits_K div(f)}_{Volumenintegral} \quad = \underbrace{\int\limits_{\partial K} < f, v > dS}_{\text{Oberflächenintegral}} \qquad (B)$$



Beispiel 2

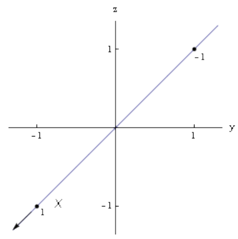
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit f(x,y,z)=(x,y,z). Ferner sei $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x, y, z \leq 1\}$



(A) $div(f) = \nabla f = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})(x,y,z) = (\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}) = 3$

$\Rightarrow \int\limits_K div(f) = 2 \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} dxdydz = 3 \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} dz = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

(B) $\int\limits_{\partial K} < f, v > dS = \int\limits_{I} < f, v > dS + \int\limits_{II} < f, v > dS + ... + \int\limits_{VI} < f, v > dS$



$\int\limits_I dS = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} dz, \qquad < f, v > = < \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{v ist I}} > = x$

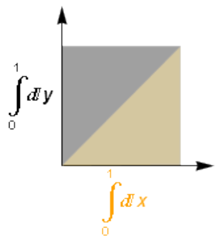
$\Rightarrow \int\limits_I < f, v > dS = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{x|_{x=1}}_{\text{Fläche bei x=1}} dydz = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} dydz = 4$

Maß für den Fluss von f durch die Fläche I

$\int\limits_{II} < t, v > dS = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} < f, v > dzdx = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} y|_{y=1} dzdx = 4$

Mit v_2=(0,1,0) äußerer Normalvektor auf II.

$... \Rightarrow \int\limits_{\partial K} < f, v > dS = 24$



Beispiel 3

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit f(x,y,z):=(1,0,0), K wie im vorherigen Beispiel

(Oberfläche außer I und II: Oberflächenintegral 0 $\Rightarrow \; f||v$)

$\int\limits_K div(f) = \int\limits_{\partial K} < f, v > dS, \qquad div(f) = \frac{\partial \cdot 1}{\partial x} + \frac{\partial \cdot 0}{\partial x} + \frac{\partial \cdot 0}{\partial x} = 0$

Analsysis Tutorium vom 12.7.2010

Klausur SS02 Lani Wayda

[illegible]

MATHEMATISCHES INSTITUT DER
JUSTUS–LIEBIG–UNIVERSITÄT GIESSEN
Sommersemester 2005
Bernhard Lani–Wayda
Sven Schulz

5. 7. 2005
Klausur

Übungen zur Analysis II
Klausur

1) a) Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$.
Was heisst es, dass f bei $x_0 \in X_1$ stetig ist?
b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Was heisst es, das f bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar ist?
c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Was heisst es, das f bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist?

2) Sei (X, d) metrischer Raum.
a) Was heisst es, dass eine Teilmenge $K \subset X$ kompakt ist?
b) Sei $(a_j) \subset X$ eine konvergente Folge mit limes $a^* \in X$. Zeigen Sie: Die Menge

$$K := \left\{ a_j \mid j \in \mathbb{N} \right\} \cup \{a^*\}$$ folgenkompakt ?

ist kompakt.

3) Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $V(x, y, z) := x^2 \cos(y) + \arctan(z)$, und sei $f := \nabla V$.
a) Berechnen Sie für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Funktionalmatrix $J_f(x, y, z)$.
b) Berechnen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.
c) Sei $Q := [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [1, 2]$ und $g : Q \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) := x^2 \cos(y) \frac{1}{z}$.
Berechnen Sie $\int_Q g$.

4) Sei $M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \text{ und } z^4 = 4 \right\}$.
a) Zeigen Sie: M ist eine eindimensionale C^1–Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.
b) Ist M abgeschlossen?
c) Ist M kompakt?

5) Auf der Einheitssphäre $S^2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ sind die Punkte $p := (0, 0, 1)$ und $q := (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ gegeben.
a) Geben Sie Basen für die Tangentialräume $T_p S^2$ und $T_q S^2$ an.
b) Beweisen Sie Ihre Antwort zu a).

6) Bestimmen Sie Minimum und Maximum der durch $f(x, y, z) := x + y + z^2$ definierten Funktion auf $S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$.

4) 12.4:

$M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn:
$\exists k \in \{1, ..., n-1\},\ R \in \mathbb{N} : \forall p \in M \exists offene\ Umgebung\ W\ von\ p\ in\ \mathbb{R}\ und\ f =$ $(f_1, ..., f_{n-k} \in C^r(W, \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $M \cap W = f^{-1}(\{0\})$ und $\nabla f_1(p), ..., \nabla f_{n-k}(p)$ l.u., also Rang $J_f(p) = n - k$ (maximal)

a) Definiere $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z^2, z^4 - 4)$. Damm $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \in M$.
$f(x,y,z) \in C^{-1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$
$\nabla f_1 = (2x, 2y, -2z), \quad \nabla f_2 = (0, 0, 4z^3)$
offensichtlich l.u. nur dann, wenn x=0, y=0. Solche Punkte $\notin M$.

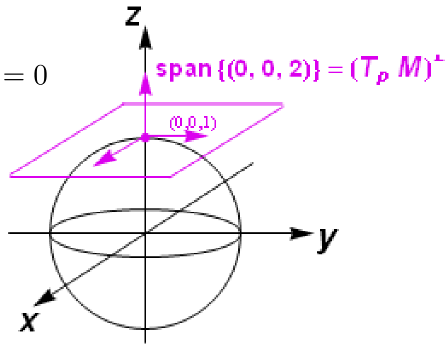
5) 12.5:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann:

a) $T_pM \subset R^n$ ist Unterraum der Dimension k.

b) Mit $f_1, ..., f_{n-k}$ wie in 12.4 a) gilt:
$\nabla f_1(p), ..., \nabla f_{n-k}(p)$ bilden Basis von $(T_pM)^\perp$.

Gesucht: Basen von T_pS^2 und T_qS^2
Mit 12.5 b): $(T_pS^2)^\perp \Rightarrow ((T_pS^2)^\perp)^\perp = T_pS^2$
$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
$f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \Rightarrow (x,y,z) \in S^2 \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$
$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow T_{x,y,z}M = (span\{\nabla f\})^\perp$
$p = (0,0,1),\ q = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$



$$\Rightarrow T_pM = (span\{(0,0,2)\})^\perp = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$T_qS^2 = (span\{(\nabla f(q))\})^\perp = (span\{(1, 0, \sqrt{3})\})^\perp$

Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $v \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ gilt, dann:

$< (v_1, v_2, v_3), (1, 0, \sqrt{3}) >= 0 \Leftrightarrow v_1 + \sqrt{3}v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -\sqrt{3}v_3$
Sei $v_1 = 1 \Rightarrow v_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} : \quad (1, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \perp (1, 0, \sqrt{3})$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T_qS^2 = span\{(0,1,0), (1, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}$