Numerik 1 Blatt 5 Julian Bergmann
Mittwoch Physik

10

Nr. 1

1) λ EW v. A: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$\det((A - \mathbb{1}\mu) - (\lambda - \mu)\mathbb{1}) = \det(A - \lambda\mathbb{1} - \underbrace{\mathbb{1}\mu + \mathbb{1}\mu}_{=0})$

Skalar & Matrix multipikativ $= \det(A - \lambda\mathbb{1})$

$\Rightarrow$ $\lambda - \mu$ ist EW zu $A - \mathbb{1}\mu$, wenn λ EW zu A!

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$, -1 kein EW $\Rightarrow$ widerlegt!

3) $Av = \lambda v$ (λ EW zu A, v EV zu A)

$\Leftrightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Leftrightarrow \mathbb{1}v = A^{-1}\lambda v \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ EW zu A^{-1}!

5) Satz: $M = SD_M S^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}MS = D_M$

EW v. D_M: $\det(S^{-1}AS - \mathbb{1}\lambda) = \det(S^{-1}(A - \mathbb{1}\lambda)S)$

skalar vertauschbar, $\mathbb{1}$ vertauschbar, $S\bar{S}$ ergänzt!

$= \det(S^{-1})\det(A - \mathbb{1}\lambda)\det(S)$

$= \frac{\det(S)}{\det(S)}\det(A - \mathbb{1}\lambda) = \det(A - \mathbb{1}\lambda) \Rightarrow$ EW v. D_M = EW v. A

Diagonalmatrix: $\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = D_M$

EW: $\det(D_M - \mathbb{1}\lambda) = 0 \Rightarrow (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda)\ldots(d_n - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ erfüllt für alle $\lambda = d_1 \ldots d_n \Rightarrow$ Diagonalelemente von Diagonalmatrizen sind ihre EW.

$\Rightarrow D_M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alle EW den gleichen Zahlenwert $\Rightarrow D_M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{1}$

$\Rightarrow A = SD_M S^{-1} = S\lambda\mathbb{1}S^{-1} = \lambda\mathbb{1}SS^{-1} = \lambda\mathbb{1}\mathbb{1} = \lambda\mathbb{1}$

$\mathbb{1}$ Diagonalmatrix $\Rightarrow A$ auch Diagonalmatrix

4) Alle EW v. $A = 0 \Leftrightarrow \det(A - \mathbb{1}\lambda) = 0 = (0 - \lambda_1)\ldots(0 - \lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0-\lambda \end{pmatrix} = A - \mathbb{1}\lambda \Rightarrow A = 0$

Auch: $Ab = \lambda b$ mit $b \neq 0 \Rightarrow A = 0$

Nur für nicht singuläre Matrizen!

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, A \neq 0$

Numerik 1 Blatt 5 Julian Bergmann (Mittwoch Physik)

8 +2

Nr. 2

1) $A = \begin{pmatrix} -5,7 & -61,1 & -32,9 \\ 0,8 & 11,9 & 7,1 \\ -1,1 & -11,8 & -7,2 \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$z^{(1)} = \frac{A z^{(0)}}{\|A z^{(0)}\|_2} = \begin{pmatrix} -99,7 \\ 19,8 \\ -20,1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{103,6} = \begin{pmatrix} -0,962 \\ 0,191 \\ -0,194 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(0)} - z^{(1)}\|_2 = 2,44$

$z^{(2)} = \frac{A z^{(1)}}{\|A z^{(1)}\|_2} = \begin{pmatrix} 0,191 \\ 0,127 \\ 0,2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,305} = \begin{pmatrix} 0,6275 \\ 0,4168 \\ 0,6576 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(1)} - z^{(2)}\|_2 = 1,818$

$z^{(3)} = \frac{A z^{(2)}}{\|A z^{(2)}\|_2} = \begin{pmatrix} -50,678 \\ 10,131 \\ -10,343 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{52,706} = \begin{pmatrix} -0,962 \\ 0,192 \\ -0,196 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(2)} - z^{(3)}\|_2 = 1,818$

$z^{(4)} = \frac{A z^{(3)}}{\|A z^{(3)}\|_2} = \begin{pmatrix} 0,193 \\ 0,125 \\ 0,202 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,306} = \begin{pmatrix} 0,63 \\ 0,408 \\ 0,661 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(3)} - z^{(4)}\|_2 = 1,82$

$\cancel{(-1)}$

$\lambda_{max} = z^{(4)T} A z^{(4)} = -31,33$

$\Rightarrow$ Da $z^{(k)}$ nicht konvergiert (siehe $\|z^{(k-1)} - z^{(k)}\|_2$), gilt offensichtlich nicht $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| < |\lambda_3|$ $\cancel{(-1/2)}$

$\Rightarrow$ errechneter λ_{max} ist vermutlich falsch.

2) $A' = \begin{pmatrix} -10,7 & -61,1 & -32,9 \\ 0,8 & 6,9 & 7,1 \\ -1,1 & -11,8 & -12,2 \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV-Richtung ± egal für EW

$z^{(1)} := -\frac{A' z^{(0)}}{\|A' z^{(0)}\|_2} = -\begin{pmatrix} -104,7 \\ 14,8 \\ -25,1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{108,68} = \begin{pmatrix} 0,963 \\ -0,136 \\ 0,231 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(0)} - z^{(1)}\|_2 = 1,37$

$z^{(2)} := -\frac{A' z^{(1)}}{\|A' z^{(1)}\|_2} = -\begin{pmatrix} -9,586 \\ 1,471 \\ -2,270 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9,96} = \begin{pmatrix} 0,962 \\ -0,148 \\ 0,228 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(1)} - z^{(2)}\|_2 = 0,0119$

$z^{(3)} := -\frac{A' z^{(2)}}{\|A' z^{(2)}\|_2} = -\begin{pmatrix} -8,775 \\ 1,369 \\ -2,097 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9,125} = \begin{pmatrix} 0,962 \\ -0,150 \\ 0,230 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(2)} - z^{(1)}\|_2 = 0,0032$

$z^{(4)} := -\frac{A' z^{(3)}}{\|A' z^{(3)}\|_2} = -\begin{pmatrix} -8,681 \\ 1,365 \\ -2,091 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9,033} = \begin{pmatrix} 0,961 \\ -0,151 \\ 0,231 \end{pmatrix}, \quad \|z^{(3)} - z^{(2)}\|_2 = 0,0021$

$\lambda_{max} = z^{(4)} A' z^{(4)} = -9,016$ (✓), EW_{max} v. A ?

$\cancel{(-1/2)}$

EW: $\det(A - \mathbb{1}\lambda) \stackrel{!}{=} 0 = -1,1(-61,1 \cdot 7,1 - (11,9 - \lambda) \cdot (-32,9))$
$+ 11,8((-5,7 - \lambda)(7,1) - 0,8 \cdot (-32,9))$
$+ (-7,2 - \lambda)((-5,7 - \lambda)(11,9 - \lambda) - 0,8 \cdot (-61,1))$
$= 46,53 + 36,19\lambda + 166,97 - 83,78\lambda + 136,44$
$+ 63,59\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 16 + 16\lambda - \lambda^2 - \lambda^3$

✓ $\Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4 \left(\xRightarrow{\text{Shift } 5} \lambda_1 = -9, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -1 \right)$

Numerik 1 Blatt 5 Julian Bergmann
physik Mittwoch

Nr. 3

10/10

1) 1. λ EW v. A $\wedge$ $\lambda = 0 \Leftrightarrow$ A singulär :

$Av = \lambda v \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Zeilen-Linear-Kombination von A mit Gewichten aus Komp. von b heben sich auf $\Rightarrow$ Rang$(A) \neq n$
$\Rightarrow$ A singulär

2. Lemma v. Gershgorin:

$\forall \lambda$ EW v. A : $\lambda \in K_j = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a_{jj}| \leq \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|}_{\text{hier } < |a_{jj}|} \}$, $j = 1 \dots n$

Also $|\lambda - a_{jj}| < |a_{jj}| \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow$ A n. singulär ✓

2) Matrix $A - z\mathbb{1}$ nicht singulär $\Leftrightarrow \det(A - z\mathbb{1}) \neq 0$
$\det(A - z\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow z$ EW v. A
$\forall$ EW in A gilt : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$
$z \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i \Rightarrow$ ↯ (Widerspruch zu z EW v. A)
$\Rightarrow \det(A - z\mathbb{1}) \neq 0 \Rightarrow A - z\mathbb{1}$ n. singulär

3) $\forall \lambda$ EW v. A : $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, also auch λ_{min} und λ_{max}. ✓
$\arg\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \in \{ \lambda_{min}, \lambda_{max} \} \Rightarrow \arg\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \in \bigcup_{j=1}^{n} K_j$

(✓)

Auch zz. für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$