11 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 11, zum 7.7.2010

11.1

a) Sei $\varepsilon > 0$. Es ex $\delta > 0$ mit $\forall x, y \in [a,b] \forall \lambda, \mu \in [c,d],\ |x-y| < \delta,\ |\lambda - \mu| < \delta :$ $|f(x,\lambda) - f(y,\mu)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
(f glm st auf der kp. Mene $[a,b] \times [c,d]$)
Speziell $|f(x,\lambda) - f(x,\mu)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x \in [a,b]$, falls $|\lambda - \mu| < \delta$
Für solche $\lambda, \mu : |j(\lambda) - j(\mu)| = |\int\limits_a^b (f(x,\lambda) - f(x,\mu))dx| \leq \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$

b) Existiere jetzt $\partial_2 f$ und sei stetig. Sei $\lambda_0 \in [c,d]$. Für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_0 + h \in [c,d]$ ist $\frac{j(\lambda_0+h)-j(\lambda_0)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,\lambda_0+h)-f(x,\lambda_0)}{h} dx = \int\limits_a^b \partial_2 f(x, \lambda_0 + \xi(x,h))dx$ mit einem $\xi = xi(x,h)$ zwischen 0 und h. Da $\partial_2 f$ st. (glm. st.) ex. $\delta > 0$ mit $\forall |\partial f(x,\lambda) - \partial f(x,\mu)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ falls $|\lambda.\mu| < \delta$
Falls $|h| < \delta$, so ist also $|\int\limits_a^b \partial_2 f(x,\lambda_0 + \xi(x,h))dx - \int\limits_a^b \partial_2 f(x,\lambda_0)dx| \leq \int\limits_a^b \underbrace{|\partial_2 f(x, \lambda_0 + \underbrace{\ldots}_{||\leq\delta}) - \partial_2 f(x,\lambda)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} dx$

ε
Also; j diffbar bei b, $j'(\lambda_0) = \int\limits_a^b \partial_2 f(x,\lambda_0)$. Nach a): j' stetig.

11.2

$$j(t) := \int\limits_c^d (\underbrace{\int\limits_a^t f(x,y)dx}_{=:g(x,t)})dy = \int\limits_a^b g(y,t)dy$$

∂_2 g ex, $d_2 g(y,t) = f(t,y)$, g ist stetig!
$j'(t) = \int\limits_c^d \partial_2 g(y,t)dy = \int\limits_c^d f(t,x)dy$
$j(a) = 0, j(b) = \int\limits_a^b j'(t)dt = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(t,y))dt$

11.3

$A(0)v_0 = \lambda_0 v_0$
$F(-r,r) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$
$(t,x,\mu_9) \mapsto \begin{pmatrix} A(t) - mx \\ ||x||_2^2 - 1 \end{pmatrix}$
$F(0,v_0,\lambda_0) = 0, \quad (D_{x,\mu}F)(0,v_0,\lambda_0) = \begin{pmatrix} A(0) - \lambda_0 I_0 & -v_0 \\ 2v_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1} =: M$

Fall für $dimU = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ gilt $M_u = 0$, so das $(A(0) - \lambda_0 I) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \vdots u_n \end{pmatrix} - u_{n+1} \cdot \vec{v}_0$ und

$< \vec{v}_0, \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} >= 0$

Es folgt $(A(b)-\lambda_0 I)^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{u_n} \end{pmatrix} = 0$

da λ_0 alg. einfach folgt: $(A(0)-\lambda_0 I) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = n\vec{v}_0$ mit 2): $n = 0$, $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0$, mit 1): $u_{n+1} = 0 \Rightarrow u = 0$

Folgt: $(D_{x,\mu}F)(0, v_0, \lambda_0)$ Isom. von $\mathbb{R}^{n+1}$. Beh. folgt aus Satz über impl. Fu'.

11.4

A(0)$symm.A(t)v(t) = \lambda(t)v(t)$
$\dot{A}(t)v(t) + A(t)\dot{v}(t) = \dot{\lambda}(t)v(t) + \lambda(t)\dot{v}(t)$
$1 =< v(t), v(t) >\Rightarrow \dot{v}(t)v(t) = 0$
Speziell bei t=0: $\underbrace{< \dot{A}(0)v_0, v_0 >}_{=<v_0,\dot{A}(0)v_0>} + \underbrace{< A(0)\dot{v}(0), v(0) >}_{<\dot{v}(0),A(0)v_0} = \dot{\lambda}(0) < v_0, v_0 > + \lambda(0) < \dot{v}(0), v_0 >$
also $\dot{\lambda}(0) =< v_0, \dot{A}(0)v_0 >$

11.5

$q_A(x) =< x, Ax >= \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$

$\partial_l q_A(x) = 2a_{ll}x_l + \underbrace{\sum_{i,i\neq l}}_{=..} a_{il}\, x_i + \underbrace{\sum_{j,j\neq l}}_{..=wegen a_{jl}=a_{lj}} a_{lj} \quad x_j = (2Ax)_l$

$\nabla q_A(x) = 2Ax$
„$\Rightarrow$“: Sei $Av = \lambda$ v. Z.z.:$\nabla q_A(v) \perp T_v S^{n-1}$
Also $\nabla q_A(v) = \nu v$ mit einem $r \in \mathbb{R}$ (da $(T_v S^{n-1})^{\perp} = \mathbb{R}v$)
Das ist richtig, da $\nabla q_A(v) = 2Av = 2\lambda v$
„$\Leftarrow$“: v krit Pkt. $\Rightarrow \exists r : \nabla q_A(v) = rv \Rightarrow 2Av = rv \Rightarrow Av = \frac{r}{2}v$

11.6 Hinweise Blatt 12

1) Eventuell Maphy-Ende. Hinweis folgen, dann leicht. Cramsche Matrix, g_{ij} etc.
2) a)Integral der Funktion 1 über Kugelkoordinaten (Funktionaldeterminante!)
   b)eine Art Blumenvase als Körper, Volumen geht, dichte etwas krankhaft (links-rechts...). Zylinderkoordinaten. SP vermutlich rechtslastig.
3) rotierende Parabel (Paraboloid), Oberfläche ohne Deckel (Kreisscheibe bei r=1)! Hinweis beachten. Funktion 1 integrieren.
4) selbe Oberfläche wie aufgebogener Torus/Zylinder.
   Übliche Vorgehensweise mit f(x)=1
5) Aus Physik bekannt.
   a) Definition einsetzen
   b) klar, aus Physik bekannt. Wenn Gradientenfeld, Integranten $\vec{v} = \nabla U :< v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) >= \frac{d}{dt}(U(\gamma(t))$, also Kurvenintegral gleich.