

# Analysis 3

Skript zur Vorlesung von Lani-Wayda (2010)

Mitgeschrieben und geL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xt von Julian Bergmann

## Inhaltsverzeichnis

<b>I. Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Einleitung . . . . .	1
1.2. Beispiele . . . . .	1
1.3. Bem: Modelle oft fragwürdig . . . . .	2
<b>2. Grundlegende Begriffe</b>	<b>3</b>
2.1. Def: Lösung d. AWP . . . . .	3
2.2. Bem: vernünftige Voraussetzungen . . . . .	3
2.3. Bem/Def: Fluss, Flusslinien und Verzweigung . . . . .	3
2.4. Def: Fluss autonomer DGL . . . . .	3
2.5. Def: stationäre und periodische Lösungen . . . . .	4
<b>3. DGLn erster Ordnung in Dim 1</b>	<b>4</b>
3.1. Lineare autonome Gl., homogen (mit „konstanten“ Koeffizienten“) . . . . .	4
3.2. Lineare Gl. mit konst. Koeff., inhomogen . . . . .	4
3.3. Lineare Gl. mit variablem Koeff., homogen . . . . .	4
3.4. Lineare Gl. mit variablem Koeff., inhomogen . . . . .	4
3.5. Bemerkung . . . . .	5
3.6. Dgl mit „getrennten Veränderlichen“ . . . . .	5
3.7. Bernoulli-DGL . . . . .	6
3.8. Riccatische - DGL . . . . .	6
3.9. Satz . . . . .	6
<b>4. Lineare autonome DGL'en im <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>7</b>
4.1. Bemerkung . . . . .	7
<b>5. Lineare autonome DGLen in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>11</b>
5.1. Definition/Bemerkung . . . . .	11
5.2. Bemerkung . . . . .	11
5.3. Folgerung . . . . .	12
5.4. Satz . . . . .	12
5.5. Folgerung . . . . .	13
5.6. Beispiel . . . . .	14
5.7. Satz . . . . .	15
<b>6. Lineare nichtautonome DGLn in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>16</b>
6.1. Bemerkung/Definition . . . . .	16

6.2. Folgerung . . . . .	16
6.3. Bemerkung/Definition . . . . .	16
6.4. Satz: Variation-der-Konstante-Formel . . . . .	17
6.5. Bemerkung . . . . .	17
6.6. Bemerkung . . . . .	18
6.7. Definition/Satz . . . . .	18
<b>7. DGLn zweiter Ordnung in Dimension 1</b>	<b>19</b>
7.1. Harmonischer Oszillator . . . . .	19
7.2. Harmonischer Oszillator mit Reibung . . . . .	19
7.3. Harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung ohne Rechnung . . . . .	20
7.4. DGLen der Form $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$ mit $V \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . . . . .	20
7.5. Zusammenhang zwischen $\ddot{x} =: -V'(x)$ und der im „Potentialgebirge“ von $V$ rollenden Kugel	21
<b>8. Existenz und Eindeutigkeit</b>	<b>22</b>
8.1. Satz: Lokaler Ex.- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf . . . . .	22
8.2. Bemerkung . . . . .	23
8.3. Bemerkung . . . . .	24
8.4. Folgerung . . . . .	24
8.5. Satz . . . . .	25
8.6. Bemerkung . . . . .	26
8.7. Folgerung . . . . .	26
8.8. Bemerkung: Existenzsätze vom Peano-Typ . . . . .	27
8.9. Beispiel zur Nichteindeutigkeit . . . . .	28
<b>9. St.diffb. Abh'keit v. Anfangswerten</b>	<b>28</b>
9.1. Satz . . . . .	28
9.2. Definition . . . . .	29
9.3. . . . . .	30
9.4. Satz: Einfache Form des Gronwalschen Lemmas . . . . .	30
9.5. Folgerung . . . . .	30
9.6. Folgerung . . . . .	31
9.7. Satz: Diffbare. Abh'keit von Anf.wert für autonome DGLen . . . . .	31
9.8. Bemerkung . . . . .	32
9.9. Satz . . . . .	32
9.10. Satz . . . . .	34
<b>10. Stabilität</b>	<b>34</b>
10.1. Definition . . . . .	34
10.2. Satz: Prinzip der linearisierten Stabilität . . . . .	34
10.3. Prinzip der linearisierten Stabilität im autonomen Fall . . . . .	35
10.4. Bemerkungen . . . . .	36
10.5. Definition . . . . .	36
10.6. Folgerung . . . . .	36
10.7. Satz: Stabilitätskriterium, Spezialfall der „direkten Methode von Liapunov“ . . . . .	37
10.8. Satz: Globale Version von 10.7 . . . . .	39

<b>11. Periodische Lös'gen</b>	<b>39</b>
11.1. Definition . . . . .	39
11.2. Bemerkung . . . . .	39
11.3. Folgerung . . . . .	40
11.4. Folgerung . . . . .	40
11.5. Satz . . . . .	41
11.6. Folgerung . . . . .	41
11.7. Bemerkung/Definition: Poincare-Abb. . . . .	41
11.8. Satz . . . . .	42
<b>12. Randwertprobleme</b>	<b>43</b>
<b>II. Funktionentheorie</b>	<b>44</b>
<b>1. hol. Abb'n, Kurvenintegrale</b>	<b>44</b>
1.1. Bemerkung . . . . .	44
1.2. Definition . . . . .	44
1.3. Folgerung . . . . .	45
1.4. Definition . . . . .	45
1.5. Definition . . . . .	46
1.6. Bemerkung: Unabhängigkeit der Parametrisierung . . . . .	46
1.7. Folgerung . . . . .	46
1.8. Bemerkung: Zushg. zu „rellen“ Kurvenintegralen . . . . .	46
1.9. Satz . . . . .	46
1.10. Folgerung . . . . .	47
1.11. Folgerung: Wegint. lok.wegunabh. . . . .	48
1.12. Lemma . . . . .	48
1.13. Satz: hom.invar. von Wegint. . . . .	49
<b>2. Cauchyscher Integralsatz</b>	<b>50</b>
2.1. Cauchyscher Integralsatz . . . . .	50
2.2. Cauchysche Integralformel . . . . .	50
2.3. lokale Potenzreihenentw. . . . .	51
2.4. Folgerung: Satz von Goursat . . . . .	51
2.5. Folg: Cauchy-Absch. für Taylor . . . . .	51
2.6. Satz von Liouville . . . . .	52
2.7. Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	52
2.8. Satz von Morera . . . . .	52
<b>3. Nullstellen hol. Fu'n</b>	<b>53</b>
3.1. Definition/Bemerkung . . . . .	53
3.2. Satz: Verhalten an Nullstellen . . . . .	53
3.3. Satz: Blätterzahl bei einer Ns . . . . .	53

<b>4. Hol. Fu'n auf Gebieten</b>	<b>54</b>
4.1. Definition . . . . .	54
4.2. Identitätssatz . . . . .	54
4.3. Satz: Gebietstreue . . . . .	55
4.4. Maximumsprinzip . . . . .	55
4.5. Folgerung . . . . .	55
4.6. Schwarzsches Lemma . . . . .	55
<b>5. Isolierte Singularitäten</b>	<b>56</b>
5.1. Definition . . . . .	56
5.2. Definition . . . . .	56
5.3. Definition . . . . .	57
5.4. Bemerkung . . . . .	57
5.5. Bemerkung . . . . .	57
5.6. Definition/Bemerkung . . . . .	58
5.7. Definition/Bemerkung: Laurentreihe . . . . .	58
5.8. Folgerung . . . . .	59
5.9. Definition/Bemerkung . . . . .	59
5.10. Satz . . . . .	60
5.11. Satz: Laurent-Entwicklung . . . . .	60
5.12. Folgerung . . . . .	60
5.13. Beschr. des Sgtätentyps durch Laurent-Entw. . . . .	61
5.14. Riemannscher Hebbarkeitssatz . . . . .	61
<b>6. <math>\oint \frac{dz}{z}</math> und Umlaufzahlen</b>	<b>61</b>
6.1. Bemerkung . . . . .	61
6.2. Bemerkung . . . . .	62
6.3. Folgerung . . . . .	62
6.4. Folgerung . . . . .	63
6.5. Definition . . . . .	63
6.6. Folgerung . . . . .	63
6.7. Beispiel . . . . .	64
<b>7. Residuen-Kalkül</b>	<b>64</b>
7.1. Definition . . . . .	64
7.2. Zykel . . . . .	64
7.3. Bemerkung:Stokscher Satz in der Ebene . . . . .	64
7.4. Residuensatz . . . . .	64
7.5. Beispiele . . . . .	66
7.6. Definition . . . . .	67
7.7. Bemerkung . . . . .	68
7.8. Bemerkung . . . . .	68
7.9. Lemma . . . . .	69
7.10. Residuensatz (Version mit Umlaufzahl) . . . . .	69
7.11. Null- und Polstellen zählendes Integral . . . . .	70

7.12. Bemerkung . . . . .	71
7.13. Folgerung: Satz von Rouché . . . . .	71
<b>8. Komplexer Logarithmus</b>	<b>71</b>
8.1. Bemerkung/Definition . . . . .	71
8.2. Folgerung . . . . .	72
8.3. Folgerung . . . . .	72
8.4. Bemerkung . . . . .	72
8.5. Folgerung/Definition . . . . .	73
<b>9. Folgen hol. Fu'n</b>	<b>73</b>
9.1. Definition . . . . .	73
9.2. Bemerkung . . . . .	73
9.3. Satz: Weierstraß . . . . .	73
9.4. Folgerung . . . . .	74
9.5. Satz . . . . .	74
9.6. Satz: Montel . . . . .	75
<b>10. Riemannscher Abb.satz</b>	<b>75</b>
10.1. Definition . . . . .	75
10.2. Bemerkung . . . . .	76
10.3. Satz: Automorphismengruppe von $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid  z  < 1\}$ . . . . .	76
10.4. Satz: Riemannscher Abb.satz . . . . .	76
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>78</b>

# Teil I.

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 1. Einführung

### 1.1. Einleitung

Newton/Leibniz:  $m\ddot{x}(t) = F(x(t))$

( $m$ : Masse,  $\ddot{x}(t)$ : Beschleunigung,  $F(x(t))$ : Kraft)

*Gewöhnliche DGL* ist ein Gesetz, das Zusammenhang herstellt zwischen einer zeitabh. Größe  $x(t)$  und ihrer Ableitung  $\dot{x}(t)$  (bzw.  $\ddot{x}(t)$ ,  $\dddot{x}(t)$ ).

z.B. (1)  $\dot{x}(t) = f(x(t)), f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(2)  $\dot{x}(t) = g(t, x(t)), g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(3) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}, f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Man nennt

- (1) *autonome (gewöhnliche) DGL*
- (2) *nichtautonome DGL*
- (3) *System (n-dim) von (1-dim) DGL.en* (hier autonom)

Manchmal auch höhere Abl'n  $\ddot{x}(t)$  etc.

Lässt sich aber auf den Fall einer Abl. zurückführen.

Noch allgemeiner:  $F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, \dot{x}(t), x(t), t) = 0$

(implizite DGL., hier nicht)

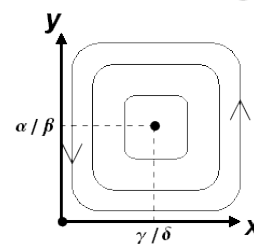
Weitere Typen von DGL:

*Partielle DGL.en* z.B.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  (PDE)

*Funktionaldiffgn.* z.B.  $\dot{x}(t) = \alpha x(t-1)$  (FDE)

Hier: *Gewöhnliche DGL.en* (ODE)

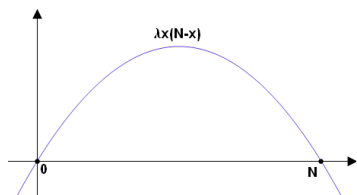
Diskussion zeigt:



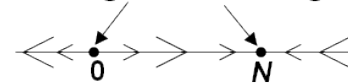
### 1.2. Beispiele

- a)  $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ , Lösg:  $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ , *Wachstum* falls  $\lambda > 0$  (z.B. Bakterien), *Zerfall* falls  $\lambda < 0$  (z.B. radioaktiver Zerfall)

- b)  $\dot{x}(t) = \lambda x(t)(N - x(t))$ ,  $\lambda > 0, N > 0$ , „*logistische Gleichung*“



Gleichgewichtslösungen



- c) *Räuber-Beute-Modell (Volterra-Lotka-System)*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

( $x(t)$ ): „Beute“, da Ableitung mit steigendem  $y$  verringert, also mit höherem  $y$  wird  $x$  schneller weniger,  $y(t)$  also „Räuber“)

( $\gamma$ : per-capita-Mortalitätsrate Räuber,  $\delta$ : -Geburtenrate Beute)

Kurzschreibweise: 
$$* \begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

„**Gleichgewichtslösgen.**“ (d.h. konstante Lösgen):

$$x(t) = y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x(t) = \frac{\gamma}{\delta}, y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Für positive Lösgen  $x(t), y(t)$  von  $*$  gilt: 
$$\begin{cases} (\log(x))' = \frac{\dot{x}}{x} = \alpha - \beta y \\ (\log(y))' = \frac{\dot{y}}{y} = \delta x - \gamma \end{cases}$$

$$\text{Damit } (\lambda \log(x))' + (\alpha \log(y))' = -\beta \gamma y + \gamma \alpha + \alpha \delta x - \gamma \alpha = \delta \dot{x} + \beta \dot{y}$$

$$\text{Also } (\gamma \log(x) + \alpha \log(y) - \delta x - \beta y)' = 0$$

$$\text{Also ist } F(x, y) = \gamma \log(x) + \alpha \log(y) - \delta x - \beta y, F: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Erhaltungsgröße oder „**erstes Integral**“, kurz: **Integral des Systems**  $*$ .

D.h.  $F$  ist konst. längs jeder Lösg. von  $*$ . Falls  $t \mapsto (x(t), y(t))$  Lösg. von  $*$ , so  $t \mapsto F(x(t), y(t))$  konstant.

Lösgen. verlaufen in **Niveaulinien** von  $F$ .

d) 
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = -\frac{\gamma M m x_1(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}^3} \\ m\ddot{x}_2(t) = \gamma \frac{M m x_2(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}^3} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Bewegung eines Planeten im Zentralkraftfeld} \\ \text{einer viel größeren Masse } M) \text{ (Kepler-Problem)} \end{array}$$

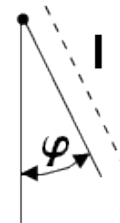
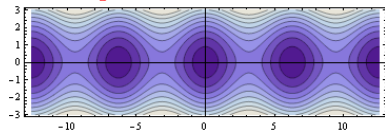
e)  $\ddot{\varphi}(t) = -\kappa \sin(\varphi(t)), (\kappa = \frac{g}{l})$  (Pendel)

Äquivalent zum System 1. Ordnung: 
$$* \begin{cases} \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{\omega} = -\kappa \sin(\varphi) \end{cases}$$

(„Jargon“: „(t)“ weggelassen)

$*$  hat auch Erhaltungsgröße, Energie:  $\frac{1}{2}\omega^2 - \kappa \cos(\varphi) =: E(\varphi, \omega)$ , Lösgen. verlaufen in **Niveaulinien** von  $E$ .

**Phasenportrait** hierzu:



### 1.3. Bem: Modelle oft fragwürdig

a) Dgl-Modelle entstehen oft durch Überlegungen für „kleine“ Zeitintervalle  $\Delta t$  und Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$

z.B.  $x(t + \Delta t) - x(t) \approx \alpha x(t) \Delta t, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \alpha x(t)$  ( $x$  als kontinuierliche Variable, auch wenn „in der Realität“ evtl. nur diskrete Werte auftreten)

b) Modelle immer mehr oder weniger vereinfachtes Abbild der modellierten Realität; grundsätzlich fragwürdig.

## 2. Grundlegende Begriffe

### 2.1. Def: Lösung d. AWP

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$  (*zeitabh. Vektorfeld*).

Sei  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in M$  und  $J \subset I$  Intervall,  $t_0 \in J$ . Eine Fu.  $\xi : J \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$  heißt Lösung

des *Anfangswertproblems* (AWP),  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ , falls  $\xi$  differenzierbar ist

und gilt:  $\forall t \in J : \xi'(t) = f(t, \xi(t)), \xi(t_0) = x_0$ .

(Entsprechend falls  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , also zeitunabh.)

### 2.2. Bem: vernünftige Voraussetzungen

*Vernünftige Voraussetzungen*  $\Rightarrow$  zu jedem  $x_0 \in M$ ,  $t_0 \in I$  ex. eine eindeutige maximale (nicht fortsetzbare) Lösg. des entspr. AWP. Diese wird oft mit  $\xi(*, x_0, t_0)$  oder  $x(*, x_0, t_0)$  bezeichnet. Diese Lösg. ist auf einem offenen Intervall  $J_{x_0, x_0} \subset \mathbb{R}$  definiert.

### 2.3. Bem/Def: Fluss, Flusslinien und Verzweigung

Betr. jetzt den autonomen Fall, also  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  (vernünftige Vor'n)

$\Rightarrow \forall x_0 \in M \exists$  off Intervall  $I_{x_0}$  mit  $0 \in I_{x_0}$  und eine *maximale Lösung*

$\phi(*, x_0) : I_{x_0} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  des AWP  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Der „*Fluss*“ (auch „*Strömung*“ zur DGL „ $\dot{x} = f(x)$ “ (Jargon))

$\phi : \underbrace{\bigcup_{x_0 \in M} I_{x_0} \times \{x_0\}}_{=: \Omega \subset \mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_0) \mapsto \phi(t, x_0)$

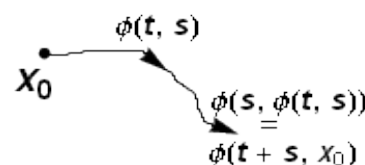
Es gilt:  $\phi(t, x_0) = \phi(s, \phi(t, x_0))$ , falls  $t \in I_{x_0}$ ,  $s \in I_{\phi(t, x_0)}$

Kurven  $t \rightarrow \phi(t, x_0)$  heißen auch *Flusslinien*. Ziel: möglichst den ganzen Fluss  $\phi$  zu beschreiben. Oft auch noch f von Parameter  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  abh.

Also  $f : M \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Entspr. Fluss  $\phi(t, x_0, \lambda)$ . Wesentliche Änderungen des qualitativen Verhaltens, wenn  $\lambda$  variiert wird, nennt man auch *Verzweigung*.

Bsp:  $\dot{x}(t) = \lambda c(t)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}$ , Fluss  $\phi(t, x_0, \lambda) = x_0 e^{\lambda t}$



### 2.4. Def: Fluss autonomer DGL

Sei  $\phi$  Fluss zu einer autonomen Dgl  $\dot{x} = f(x)$  auf  $M \subset \mathbb{R}^n$  def.

und  $T \in \mathbb{R} M_T := \{x_0 \in M \mid T \in I_{x_0}\}$

Die Zeit-T-Abb. ist dann  $\phi(T, *) : M_T \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n, x_0 \mapsto \phi(T, x_0)$

Man kann zeigen  $\phi(T, M_T) = M_{-T}$  und  $\phi(-T, *) \circ \phi(T, *) = id_{M_T}$



## 2.5. Def: stationäre und periodische Lösungen

Eine Lösg.  $\xi$  von  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  oder  $\dot{x}(t) = f(x(t))$

$$x_0 = \xi(0) = \xi(T) = \phi(T, x_0)$$

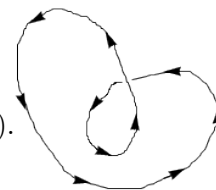
- heißt *stationäre Lösung.*, falls sie konstant ist (Gleichgewichtslösg.)

(Also  $\forall t \in \mathbb{R} : \xi(t) = x_0$ , also:  $\forall t \in \mathbb{R} : f(t, x_0) = 0$ )

- heißt *periodisch Lösung.*, falls  $T > 0$  ex. mit  $\forall t \in \mathbb{R} : \xi(t+T) = \xi(t)$ .

Im autonomen Fall bedeutet dies:  $\phi(T, x_0) = x_0 = \xi(0)$ .

Also ist  $x_0$  Fixpunkt der zeit-T-Abb. (Ebenso jeder Pkt.  $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ )



## 3. DGLn erster Ordnung in Dim 1

### 3.1. Lineare autonome Gl., homogen (mit „konstanten“ Koeffizienten“)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t), & \lambda \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Lösg. } x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0$$

Mit dem „*Entwicklungsoperatoren*“  $u(t, s) := e^{\lambda(t-s)}$  ( $t, s \in \mathbb{R}$ ) ist offenbar

$$x(t) = u(t, t_0)x(t_0)$$

### 3.2. Lineare Gl. mit konst. Koeff., inhomogen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda x(t) + h(t), & (h: I \text{ Intervall} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Lösg. } x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} h(s) ds \quad (\text{Variation-der-Konstanten-Formel})$$

(Verifikation durch Diff., für den rechten Term:

Betrache  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda(t_2-s)} ds$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow t \mapsto (t, t) \mapsto F(t, t)$ , Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \int_0^t g(t, s) ds = g(t_0, t_0) + \int_0^{t_0} \partial_1 g(t_0, d) ds$$

$$\text{Andere Schreibweise: } x(t) = u(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t u(t, s)h(s) ds$$

### 3.3. Lineare Gl. mit variablem Koeff., homogen

$$* \begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), & a : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Für  $t, s \in I$  sei  $u(t, s) = \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right)$  \*\* *Entwicklungsoperator*

Damit Lösung von \*:  $x(t) = u(t, t_0)x_0 = \exp\left(\int_{t_0}^t a(r) dr\right)x_0$

### 3.4. Lineare Gl. mit variablem Koeff., inhomogen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad a, h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Lösg. mit  $u(t, s)$  wie in (\*\*):  $x(t) = u(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t u(t, s)h(s) ds$

Ausgeschrieben:  $x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(r) dr\right)x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right)h(s) ds$

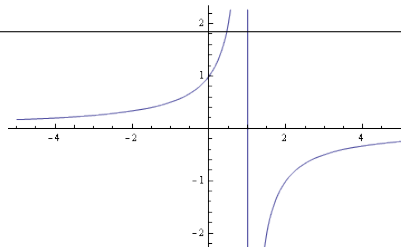
Bemerkung: 3.4 enthält 3.1-3.3 als Spezialfälle.

### 3.5. Bemerkung

Bisher Lösungen stets auf ganz I definiert. Bei nichtlinearen Gl. nicht immer so!

#### Beispiel zu 3.5

$$\begin{cases} \dot{x} = (x(t))^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}, \Rightarrow \text{Lösng. } x(t) = \frac{1}{1-t} \text{ auf } (-\infty, 1)$$



### 3.6. Dgl mit „getrennten Veränderlichen“

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $D \subset \mathbb{R}$  offen,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in D$ ,  $g(x_0) \neq 0$

Dann kann das AWP  $\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  wie folgt gelöst werden:

- Die Fu'  $\frac{1}{g}$  hat auf einem Intervall um  $x_0$  (in D) eine Stammfu.  $\Gamma$ , die streng monoton ist.
- $\xi : t \mapsto \underbrace{\Gamma^{-1}}_{\text{inverse Fu}} \left( g(x_0) + \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$  ist Lösung von  $*$  auf einem Intervall um  $t_0$ .

Denn:  $\xi(t_0) = \Gamma^{-1}(\Gamma(x_0) + 0) = x_0$ ,

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(\dots))} \underbrace{(\dots)'}_{=a(t)}(t) = g(\underbrace{\Gamma^{-1}(\dots)}_{\xi(t)})a(t) = a(t)g(\xi(t))$$

„Handwerklich“ etwa so:  $\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$$(1) \int_{t_0}^t \frac{x(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))} = \frac{d}{ds}(s \mapsto \Gamma(x(s)))$$

$$\Gamma'(x(t)) - \Gamma'(x(t_0)) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad \Gamma(x(t)) = \Gamma(x_0) + \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\Rightarrow x(t) = \Gamma^{-1}\left(\Gamma(x_0) + \int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

$$\text{Alternativ: } (1) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{g(\xi)} d\xi = \Gamma(x(t)) - \Gamma(x(t_0))$$

Physik etwa so:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)g(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{g(x)} dx = \int_{t_0}^t a(t) dt \Rightarrow \Gamma(x(t)) - \Gamma(x(t_0)) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

**Beispiel zu 3.6**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \cos(t)(x(t))^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(x(s))^3} ds = \int_0^t \cos(s) ds \Rightarrow \frac{d}{ds} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{x(s)^2} \right) = \frac{\dot{x}(s)}{x(s)^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x(t)^2} - \left( -\frac{1}{2} \right) = \sin(t) \Rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{x(t)^2} \right) = \sin(t) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\sin(t)}}, t \in \left( -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$$

**3.7. Bernoulli-DGL**

(1)  $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Falls  $x$  Lösg. auf  $I$  und  $\forall t \in I : x(t) > 0$ , so  $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)^\alpha} = a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t)$ ,

$$\frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dt} (t \rightarrow x(t)^{1-\alpha})$$

also löst die durch  $y(t) := x(t)^{1-\alpha}$  def. Fu' die linear inhomog. Gl. mit *variablen Koeffiz.*

(2)  $\dot{y}(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t)$

Falls umgekehrt  $y$  Lösg. von (2) und auf  $I$  positiv ist, so def.

$x(t) := y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  Lösg. von (1).

**3.8. Riccatische - DGL**

(3)  $\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)x(t)^2 + k(t)$

Falls  $\xi, \eta$  Lösungen von (3), so gilt für  $\Delta := \xi - \eta$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= a(t) + \Delta(t) + b(t) \left[ \underbrace{\xi(t)^2 - \eta(t)^2}_{= (\xi - \eta)(\xi + \eta)} \right] = a(t)\Delta(t) + b(t)[\Delta(t)(\Delta(t) + 2\eta(t))] \\ &= \underbrace{[a(t) + 2\eta(t)b(t)]}_{=: \alpha(t)} \cdot \Delta(t) + b(t)\Delta(t)^2 \end{aligned}$$

Also (4)  $\dot{\Delta}(t) = \alpha(t) * \Delta(t) + b(t)\Delta(t)^2$  (Bernoulli-DGL mit  $d = 2$ ).

Falls eine *Spezielle Lösung*  $\eta$  von (3) bekannt ist und die Lösungen von (4), bekannt sind, so hat jede Lösung von (3) die Form  $x(t) = \eta(t) +$  (Lösungen von (4)).

**3.9. Satz**

Sei  $D \subset \mathbb{R}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei Lösung der *autonomen und eindimensionalen DGL*.  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

Dann ist  $x$  monoton wachsend oder fallend.

**Beweis**

Annahme: Es existiert  $t_1, t_2, t_3 \in I$  mit  $x(t_1) < x(t_2) > x(t_3)$ .

Nach dem Zwischenwert Satz existiert dann  $t_- \in (t_1, t_2)$

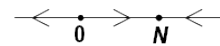
und  $t_+ \in (t_2, t_3)$  mit  $x(t_+) < x(t_2)$ .

$x$  ist  $C^1$ , und  $*$  =  $\int_{x(t_-)}^{x(t_+)} f(\xi) d\xi = \int_{t_-}^{t_2} \underbrace{f(x(s))}_{\dot{x}(s)} ds > 0$ .

$*$  =  $\int_{x(t_+)}^{x(t_2)} f(\xi) d\xi = \int_{t_+}^{t_2} f(x(s)) \dot{x}(s) ds < 0$  mit  $t_+ > t_2$ ,  $\dot{x}$  nicht Null auf  $[t_2, t_+]$

Also Widerspruch. □

Bemerkung: Für  $\dot{x}(t) = f(x(t - \delta))$  Oszillation etc. möglich

**Beispiel zu 3.9**

$\dot{x}(t) = \lambda \cdot x(t)(N - x(t)), \lambda > 0, N > 0$

**4. Lineare autonome DGL'en im  $\mathbb{R}^2$** 

$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ , wobei  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

**4.1. Bemerkung**

a)  $t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist stets Lösung.

b) max. Lösungen sind stets auf ganz  $\mathbb{R}$  (auch  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ )

c) Falls  $\xi, \eta$  Lösungen, so für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (auch  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ )  $\lambda * \xi + \mu * \eta$  auch Lösung.

d) Falls  $\xi, \eta$  Lösungen und  $\xi(0), \eta(0)$  linear unabhängig, so gilt:

Für jedes  $\xi(0) \in \mathbb{R}$  existiert  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  mit  $\xi_0 = \lambda * \xi(0) + \mu * \eta(0)$  klar.

Die Lösung des AWP  $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ x(0) = \xi_0 \end{cases}$

ist dann durch  $\xi(t) = \lambda * \xi(t) + \mu * \eta(t)$  gegeben.

Zwei solche Lösungen  $\xi, \eta$  heißen auch **Fundamentalsystem** (FS) zur Gleichung

**Beispiel zu 4.1 a)**

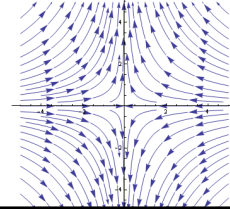
$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Ausgeschrieben lautet  $\dot{x}(t) = Ax(t)$

Dann  $\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \end{cases}$

Die Lösung zum Anfangswert  $\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{0,1} \\ \xi_{0,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$  ist dann gegeben durch

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_{0,1} \\ e^{\lambda_2 t} \xi_{0,2} \end{pmatrix}$$

*Phasenportrait* im Falle  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

**Beispiel zu 4.1 b)**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\omega > 0$ ,

Ausgeschrieben:  $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega^2 \cdot x_1(t) \end{cases}$

Äquivalent:  $\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_1(t)$  („*Harmonischer Oszillator*“).

Lösungen sind zum Beispiel:

$$\xi(t) := \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\eta(t) := \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

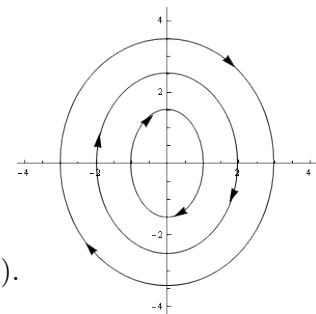
Diese bilden ein Fundamentalsystem.

$\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ ,  $\eta(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Für jede Lösung  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \xi_1^2(t) + \frac{1}{\omega^2} \xi_2^2(t) = \xi_1^2(0) + \frac{1}{\omega^2} \xi_2^2(0)$$

(Differenzieren + Einsetzen der DGL gibt 0)

Alle Lösungen sind periodisch mit der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Allgemein:

$A = (a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22})$ , EW von A sind NS des charakteristischen Polynoms:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \text{spur}(A)\lambda + \det(A)$$

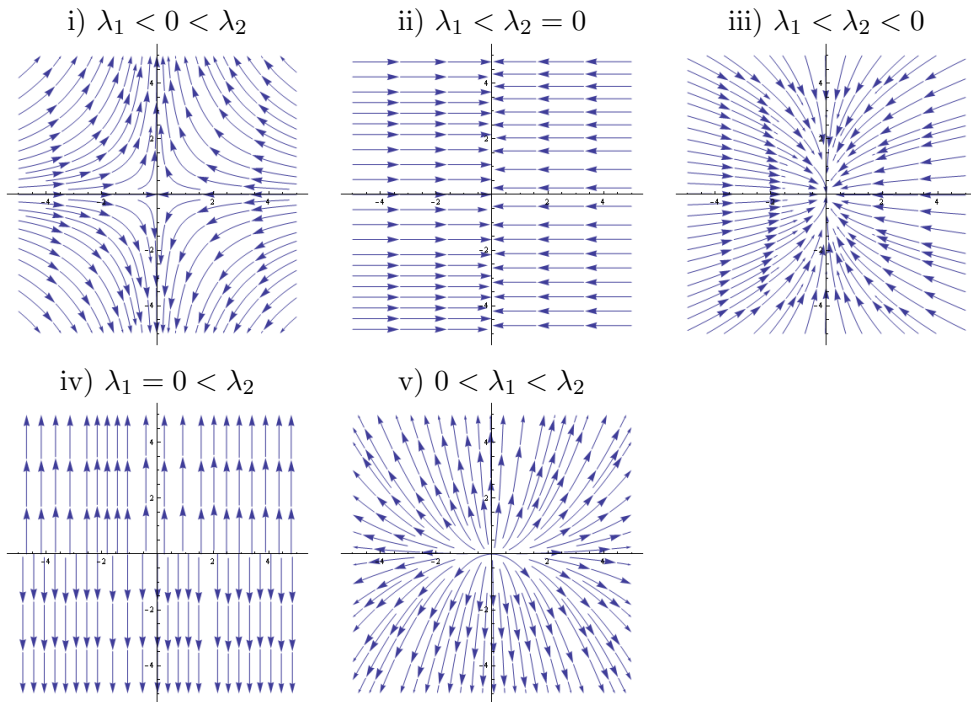
$$\text{Also } \lambda_{1,2} = \frac{\text{spur}(A) \pm \sqrt{\text{spur}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Fall 1:

2 reelle EW  $\lambda_1, \lambda_2$  verschieden, mit Eigenvektoren  $b_1, b_2$ .

Ein FS ist dann gegeben durch  $e^{\lambda_1 t} \cdot b_1, e^{\lambda_2 t} \cdot b_2$

Unterfälle:



Fall 2:

$\lambda_1 = \lambda_2$ , und es ex. 2 l.u. EV  $b_1, b_2$  zum EW  $\lambda_1$ .

(Dann  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ )

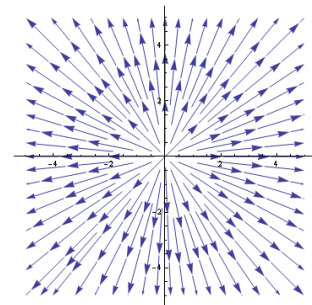
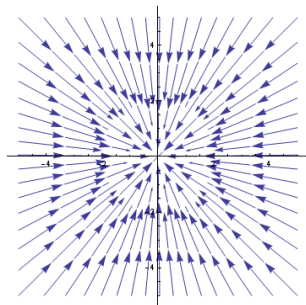
Unterfälle:

i)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$0 = \lambda_1 = \lambda_2$

$0 < \lambda_1 = \lambda_2$

Lösung zum Anfangswert  $x_0 : e^{\lambda_1 t x_0}$  Nur stat. Lös.



Fall 3:

$\lambda_1 = \lambda_2$ , es ex nur 1 l.u. EV  $b_1$ .

$E_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - A)$  (Eigenr zu  $\lambda$ )

$G_\lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{Ker}(\lambda I - A)^j$  (Verallg Eigenr., algebr. Eigenr)

Hier:  $E_\lambda = \mathbb{R}b_1$ ,  $G_\lambda = \mathbb{R}^2$

Dann ex.  $b_2 \in \mathbb{R}^2$  mit  $b_1, b_2$  l.u. sodass  $Ab_2 = \lambda_1 b_2 + b_1$  (JNF:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ )

Es bilden dann  $\underbrace{e^{\lambda_1 t} \cdot b_1}_{=:\xi(t)}$ ,  $\underbrace{e^{\lambda_1 t}(t \cdot b_1 + b_2)}_{=:\eta(t)}$  ein FS.

**Beweis**

$\xi(0) = b_1, \eta(0) = b_2$ , also l.u.

$$\dot{\xi}(t) = \lambda_1 \cdot \xi(t) = A \cdot \xi(t)$$

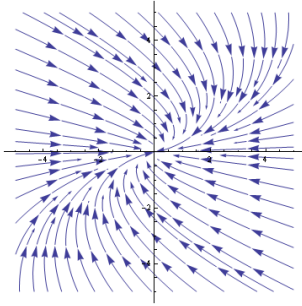
$$\dot{\eta}(t) = \lambda_1 \cdot \eta(t) + e^{\lambda_1 t} \cdot b_1$$

$$A\eta(t) = e^{\lambda_1 t} [t \cdot \lambda_1 b_1 + \lambda_1 b_2 + b_1] = \lambda_1 \eta(t) + e^{\lambda_1 t} \cdot b_1$$

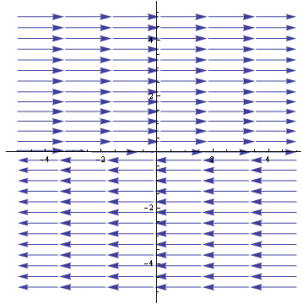
□

Unterfälle:

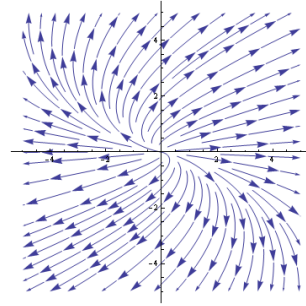
i)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



ii)  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



iii)  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$



Fall 4:

$$\lambda_1 = \rho + i\omega, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \rho - i\omega, \omega \neq 0$$

Sei  $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  EV von  $A$  zum EW  $\lambda_1$ .

Dann sind  $\xi(t) = e^{\lambda_1(t)}v, \eta(t) = \xi(t) = e^{\lambda_2 t}\bar{v}$  ein (komplexwertiges) FS.

Dann auch  $\frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}), \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi})$  auch FS, reellwertig.

$$\text{Es ist } \xi(t) = e^{\rho t} \cdot e^{i\omega t} \cdot \left( \underbrace{\Re(v)}_{b_1} + i \underbrace{\Im(v)}_{b_2} \right) = e^{\rho t} \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))(b_1 + ib_2),$$

also bilden  $e^{\rho t} \cdot (\cos(\omega t)b_1 - \sin(\omega t)b_2), e^{\rho t} \cdot (\cos(\omega t)b_2 + \sin(\omega t)b_1)$  ein reellw. FS.

Die allg. Lösg. hat die Form

$$e^{\rho t} \cdot \{c_1[\cos(\omega t)b_1 - \sin(\omega t)b_2] + c_2[\cos(\omega t)b_2 + \sin(\omega t)b_1]\}$$

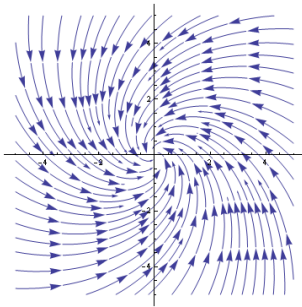
(mit gewissen  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ )

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}}_{\text{Spalten}} e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

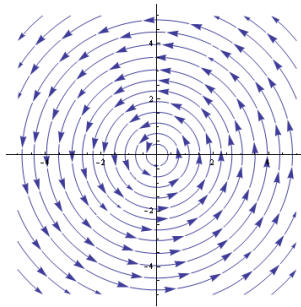
Als Funktion von  $t$ : Bild einer log. Spirale unter Abb.  $y \mapsto [b_1, b_2]\lambda$

Unterfälle:

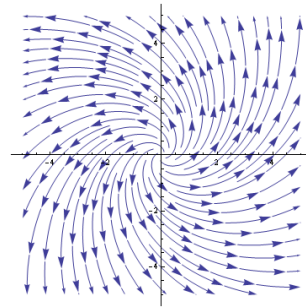
i)  $\rho < 0$



ii)  $\rho = 0$



iii)  $\rho > 0$

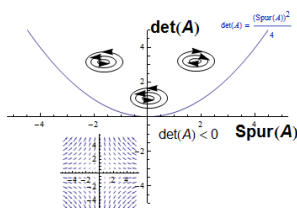


**Bemerkung:** „Drehrichtung“ nicht aus Eigenwerten bestimmbar:

$$\text{Setze z.B. } S := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = S^{-1}AS$$

A und  $\tilde{A}$  haben gleiche EW aber verschiedene Drehrichtungen.

Zusammenfassung aller Fälle in einem Diagramm:



### 5. Lineare autonome DGLen in $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: Für Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist die in der 2. **Matrixnorm** durch  $\|A\| := \sup_{\|x\|=1, x \in \mathbb{R}^n} \|Ax\|$

(Entspr.  $\mathbb{C}^n$ )

Es gilt:  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| (x \in \mathbb{R}^n \text{ bzw. } \mathbb{C}^n)$

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| (A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ bzw. } \mathbb{C}^{n \times n})$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

#### 5.1. Definition/Bemerkung

Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei  $exp(A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$

Die Reihe konvergiert in  $\mathbb{C}^{n \times n} = \mathbb{C}^{n^2}$

$$\left\| \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} A^j - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} A^j \right\| = \left\| \sum_{j=k+1}^m \frac{1}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=k+1}^m \frac{1}{j!} \|A\|^j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

$\underbrace{\leq}_{\substack{\text{Dreiecksung.} \\ \|\cdot\| \text{ ind. Norm} \\ \text{von Norm auf } \mathbb{C}^n}}$

da  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = exp(\|A\|)$  konv.

Also Partialsummen von  $\sum_j \frac{1}{j!} A^j$  und Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , also konvergent.

Man sieht:  $\|exp(A)\| \leq exp(\|A\|)$

Falls  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $AB = BA$ , so ist  $exp(A + B) = exp(A) \cdot exp(B)$

Analog:  $exp(A)$  für  $A \in \underbrace{L(U, U)}_{\substack{\text{Lineare Abb'n} \\ U \rightarrow U}}$ , falls  $U \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  Unterraum.

#### 5.2. Bemerkung

Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ex. eine Diagonalmatrix D (mit EW von A in der Diagonalen, jeder so oft wie seiner alg. Vielfachheit entspricht) und **nilpotente Matrix** N (d.h.  $\exists k \in \mathbb{N} : N^k = 0$ ) und  $T \in GL(n, \mathbb{C})$ , so dass  $T^{-1}AT = D + N$  (**Jordan-NF**)

Weiter ist  $DN = ND$  (Beweis Übung)

$$\text{Es folgt } exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (T(D + N)T^{-1})^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} T(D + N)^j T^{-1}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Mult. mit } T, \text{ bzw. mit} \\ T^{-1} \text{ ist ste als Abb } \mathbb{C}^{n \times n}}} T \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (D + N)^j \right) T^{-1} = T \cdot exp(D + N) T^{-1} = T \cdot exp(D) exp(N) T^{-1},$$



$$\text{also } T^{-1} \exp(A)T = \exp(D) \exp(N) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} N^j, \text{ wobei } \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

die EW von A sind.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{0der 1 statt x})$$

$$\exp(N) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} N^j$$

### 5.3. Folgerung

Für  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $T^{-1}AT = D + N$  wie oben ist

$$T^{-1} \exp(tA)T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j}_{\text{Einheitsmatrix falls } N=0}$$

Insbes. falls  $N=0$  (**Adiagonalisierbar**):

$$T^{-1} \exp(tA)T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

### 5.4. Satz

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $h : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetig,  $t_0 \in I$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $x_0 \in \mathbb{C}^n$

a) Die (eindeut.) Lösg des AWP

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$x(t) = \exp((t - t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A)h(s)ds \quad (\text{„Variation-der-Konstanten-Formel“})$$

b) Insbesondere:  $x(t) := \exp((t - t_0)A)x_0$  ist die Lösung von  $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Die Spalten von  $\exp(tA)$  oder  $\exp((t - t_0)A)$  bilden ein FS. zu der homogenen Gleichung  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  (d.h. nlinear unabh. Lösg.)

**Beweis**

zu a Die Fu.  $t \mapsto \exp(tA)$  ist diffbar (Bew. wie für Potenzreihen mit Koeff in  $\mathbb{C}$ )  
 und für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\frac{d}{ds}|_{s=t}(\exp(sA)) = A \cdot \exp(tA)$   
 Formel folgt durch Differenzieren.

zu b Seien  $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$  die Spalten von  $\exp(tA)$ . Dann  $\xi_i(0) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

da  $\exp(0A) = \mathbb{1}$ . Falls bei einem  $t \in \mathbb{R}$   $\mu_1, \dots, \mu_n$  ex. mit  $\sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i(t_1) = 0$ , so löst

$$\eta := \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i \text{ das AWP } \begin{cases} \dot{\eta}(s) = A\eta(s) \\ \eta(t_1) = 0 \end{cases}$$

Mit Eindeutigkeit:  $\eta = 0$ , speziell an  $\eta(0) = 0$ , also  $0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i(0) = \sum \mu_i e_i$ ,

also  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$

Damit  $\xi_1, \dots, \xi_n$  lin. unabh. □

**5.5. Folgerung**

- a) Zu jedem EW  $\lambda$  von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  der alg. Vielf.keit  $\nu_\lambda$  existieren  $\nu_\lambda$  linear unabh. Lösgen von  $\dot{x} = Ax$  der Form  
 $x_{\lambda,k}(t) = e^{\lambda t} p_k^\lambda(t)$ ,  $k = 1, \dots, \nu_\lambda$   
 wobei  $p_k^\lambda$  eine Polynomfkt. vom Grad höchstens  $\nu_\lambda - 1$  ist mit Koeffizienten  $\mathbb{C}^k$   
 (sogar im algebraischen Eigenraum  $G_\lambda$  zum EW  $\lambda$ )
- b) Die Fu'n  $x_{\lambda,k}$ ,  $\lambda$  EW von  $A$ , und  $k \in \{1, \dots, \nu_k\}$  bilden ein FS für  $\dot{x} = Ax$
- c) Falls  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so ist, falls  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  EW von  $A$ , auch  $\bar{\lambda}$  EW von  $A$ .  
 In diesem Fall erhält man ein reellwertiges FS aus Real- und Imaginärteil der Lösg'n  $x_{\lambda,k}$  und  $x_{\bar{\lambda},k}$

**Beweis**

Es ist  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \text{ EW von } A} G_\lambda$  und  $AG_\lambda \subset G_\lambda$  und für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\exp(tA)G_\lambda \subset G_\lambda$  (\*)

Sei  $\lambda$  EW von  $A$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} G_\lambda = \nu_\lambda$  (alg. Vielfachheit).

Es ex. Basis  $u_1, \dots, u_{\nu_\lambda}$  von  $G_\lambda$ , so dass

$Au_k = \lambda u_k + \varepsilon_k u_{k-1}$  mit  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ ,  $k = 1, \dots, \nu_\lambda$ ,

wobei  $u_0 := 0$  (*Jordan-Normalform*)

(Darst. Matrixnorm  $\hat{A}|_{G_\lambda} : G_\lambda \rightarrow G_\lambda$  bzgl. Basis  $u_1, \dots, u_{\nu_\lambda}$  :  $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & \end{pmatrix}$ )

Definiere  $N_\lambda : G_\lambda \rightarrow G_\lambda$  durch  $N_\lambda u_k := \varepsilon_k u_{k-1}$ .

Dann  $\forall x \in G_\lambda : Ax = \lambda x + N_\lambda x$  und

$\forall x \in G_\lambda \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tA)x = \exp(t\lambda I + t \cdot N_\lambda)x \stackrel{*}{=} \exp(t\lambda \cdot I) \cdot \exp(tN_\lambda)x$

(I: identische Abbildung,  $t \cdot \lambda I$  und  $N_\lambda$  vertauschen auf  $G_\lambda$ )

Falls  $x = \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \alpha_k u_k$

(Darstellung mittels Basis  $u_1, \dots, u_{\nu_\lambda}$ ),

so ist  $\exp(tA)x = \exp(t \cdot \lambda) \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} (\alpha_k \cdot \exp(tN_\lambda)u_k) = \exp(t\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \alpha_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} N_\lambda^j u_k =$

$$\exp(t\lambda) \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \alpha_k \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\varepsilon_k \cdots \varepsilon_{k+1-j}}_{\text{lesen: 1, wenn } j=0} u_{k-j} \frac{t^j}{j!}}_{=P_k^\lambda(t)} = \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \alpha_k \cdot \underbrace{\exp(t\lambda) P_k^\lambda(t)}_{=: x_{\lambda,k}(t)}$$

Der Raum der Lös'n, die in  $G_\lambda$  verlaufen hat die Dim  $\nu_\lambda$  und die Fu'nkt  $x_{\lambda,k}(t) = e^{t\lambda} P_k^\lambda(t)$  sind Erz.System dieses Raumes, also auch Basis. (a bewiesen)

zu b): Folgt aus a) und aus der direkten Summenzerl.  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda, \lambda \text{ EW v } A} G_\lambda$ , die unter  $\exp(tA)$  (für jedes  $t \in \mathbb{R}$ ) invariant ist. c) leicht. □

**5.6. Beispiel**

**Beispiel zu 5.6**

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2, \quad -1 \text{ EW alg. Vielfh. } 2$$

EV:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  geom. Eigenr. is 1-dim

Also  $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: \xi(t)$  eine Lösg:

$$\eta(t) := e^{-t} \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad \text{mit Unbekannten } a, b \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in Dgl ergibt ... mögl Lösg:  $a = 0, b = -1$ . Damit  $\xi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\eta(t) =$

$$e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} \text{ sind FS}$$

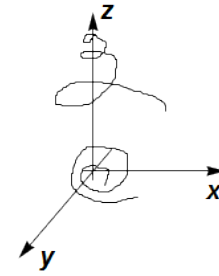
**Bemerkung:** Für  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  beschreibt Multiplikation mit  $\lambda = a + i\beta$

$$\text{ist } \exp(tA) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{=: U(t)}$$

$$\text{Beweis: Zeige } \begin{cases} \dot{U}(t) = AU(t) \\ U(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit Eindeutigkeit  $U(t) = \exp(tA) \forall t \in \mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \exp(tA) = \begin{pmatrix} \vdots & 0 \\ \dots & e^{\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma t} \end{pmatrix}$$

**5.7. Satz**

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n} (\mathbb{R}^{n \times n})$  und  $\|\cdot\|$  eine induz. Matrixnorm auf  $\mathbb{C}^{n \times n} (\mathbb{R}^{n \times n})$

Sei  $\rho := \max_{\lambda, \lambda \text{ EW v. } A} \Re(\lambda)$  und sei  $\varepsilon > 0$

a) Dann ex.  $k > 0$  mit  $\forall t \geq 0 : \|\exp(tA)\| \leq k e^{(\rho + \varepsilon)t}$

b) Falls A diagonalisierbar, so gilt dies auch für  $\varepsilon = 0$

**Beweis**

Wie in 5.2 ist:

$$\exp(tA) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j \right) T^{-1}$$

Es ex. Konstante  $c_1 > 0$  mit  $\forall V = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|B\| \leq c_1 * \max_{i,j} |b_{ij}|$   
*(Normäquivalenz)*

Somit  $\| \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \| \leq c_1 \max_{j=1, \dots, n} |e^{\lambda_j t}| \leq c_1 e^{\rho t} \text{ für } t \geq 0$

für  $t \geq 0$  ist  $\| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} N^j \| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \|N\|^j =: P(t)$

Zu  $\varepsilon > 0$  ex.  $c_2(\varepsilon) > 0$  mit  $\forall t \geq 0 e^{-\varepsilon t} P(t) \leq c_2$

Es folgt:  $\| \exp(tA) \| \leq \|T\| \cdot c_1 e^{\rho t} \cdot \underbrace{P(t)}_{\leq c_2 e^{\varepsilon t}} \cdot \|T^{-1}\| \leq c_1 c_2 \|T\| \|T^{-1}\| e^{(\rho+\varepsilon)t} \leq k e^{(\rho+\varepsilon)t}$

b) Falls A diagbar. so  $N=0$ , Rest klar. □

## 6. Lineare nichtautonome DGLn in $\mathbb{R}^n$

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $A : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} (\mathbb{R}^{n \times n})$  stetig,

Betr.  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  (\*)

### 6.1. Bemerkung/Definition

$n$  Lösungen  $\xi_1, \dots, \xi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$  von (\*) sind entweder zu allen Zeilen  $t \in I$  linear abh. oder zu allen linear unabh.

Im Fall „linear unabhängig“ heißen Sie *Fundamentalsystem* von (\*) und die durch  $I \ni t \rightarrow X(t) := (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

definierte Funktion heißt *Fundamentalmatrixlösung* von Stellen.

Beweis: Mit der Eindeutigkeit der Lösg. zum Awert 0.

### 6.2. Folgerung

Alle Lösungen von (\*) bilden einen  $n$ -dim Unterraum von  $C^0(I, \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n))$ , dieser wird von den Spalten einer bel. Fund.matrixlösg. aufgespannt.

Beweis: Sei  $t_0 \in I$ . Die Lösgn  $\xi_i$  von (\*) mit  $\xi_i(t_0) = \vec{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  bilden eine FS.

Rest klar

### 6.3. Bemerkung/Definition

a) Falls  $t_0 \in I$ ,  $X$  Fund.matrixlösg., so def. auch  $U(t, t_0) := X(t) \cdot X(t_0)^{-1}$  Fund.matrixlösg.

Es gilt:  $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$

- b) Die Matrizen  $U(t, s)$  ( $t, s \in I$ ) heißen „*Entwicklungsoperatoren*“ zu  $(*)$ , für  $s \in I$  ist  $U(\cdot, s)$  die eind. Lösg. des Matrix-AWP

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = A(t)U(t) \\ U(s) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Beweis**

zu a):  $U(t_0, t_0) = X(t_0)X(t_0)^{-1} = \mathbb{1}$ .

$$\frac{d}{dr} \Big|_{r=t} U(r, t_0) = \dot{X}(t)X_0^{-1} = A(t) \underbrace{X(t)x_0^{-1}}_{U(t, t_0)} = A(t)U(t, t_0)$$

Spalten von  $U(\cdot, t_0)$  lin. unabh. klar.

b) klar

□

**6.4. Satz: Variation-der-Konstante-Formel**

Seien  $A, I$  wie in oben,  $h : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  stetig,  $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{C}^n$ .

Seien  $U(t, s)$  ( $t, s \in I$ ) die Entw.oper'n zu  $\bar{x}(t) = A(t)x(t)$  wie in 6.3

Dann ist die Lösg des AWP  $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  geg. durch

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)h(s)ds$$

Beweis: Bestätigung durch Differenzieren

**6.5. Bemerkung**

Für die Entwicklungsoper'n gilt (für  $r, s, t \in I$ ):

$$\text{a) } U(s, s) = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ , insbes

c)  $U(s, t)U(t, s) = \mathbb{1}$ , also  $U(s, t) = U(t, s)^{-1}$

**Beweis**

$$\text{a) } U(s, s) = X(s)X(s)^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\text{b) } U(t, r)U(r, s) = X(t)X(r)^{-1}X(r)X(s)^{-1} = X(t)X(s)^{-1} = U(t, s)$$

$$\text{c) } U(t, s)U(s, t) = U(t, t) = \mathbb{1}$$

□

### 6.6. Bemerkung

- 1) Im autonomen Fall  $\dot{x}(t) = Ax(t)U(t, s) = \exp((t-s)A)$   
 Im nichtautonomen Fall keine allg. Formel, außer im 1-dim Fall:  
 $x(t) = a(t)x(t)$

$$u(t, s) = \exp\left(\int_s^t a(r)dr\right)$$

- 2) Man könnte vermuten, dass im höher-dim Fall gilt:  
 $U(t, s) = \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right)$ , ist aber im Allgemeinen falsch.

Grund: Im Allg.  $A(t)$  nicht vertauschbar mit  $\int_s^t A(r)dr$ .

### 6.7. Definition/Satz

Sei  $X$  Fundamentalmatrixlsg. zu  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  und  $W(t) := \det(X(t))$   
 (Wronski-Determinante)

Dann gilt:  $\forall t \in I : \dot{W}(t) = \text{spur}(A(t)) \cdot W(t)$

Also für  $t_0 \in I : W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{spur}(A(s))ds\right)$

#### Beweis

- 1) Für eine diffbare, matrixwertige Fu.  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  mit Spalten  $m_1, \dots, m_n$  ist  
 $\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (\det(M(S))) = \det(\dot{m}_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)) + \det(m_1(t), \dot{m}_2(t), \dots, m_n(t)) + \dots + \det(m_1(t), m_2(t), \dots, \dot{m}_n(t))$

- 2) Sei  $\tau \in I$ . Mit den Entwicklungso. wie oben ist:

$$\forall t \in I : X(t) = U(t, \tau)X(\tau) \text{ (löst } \begin{cases} \dot{V}(r) = A(r)V(r) \\ V(\tau) = X(\tau) \end{cases} )$$

$$\text{Also } \forall t \in I : \underbrace{\det(X(t))}_{W(t)} = \det(U(t, \tau)) \cdot \underbrace{\det(X(\tau))}_{W(\tau)}$$

Sei  $U(t, \tau) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$  ( $\xi$ : Spalten)

Dann  $\xi_j(\tau) = e_j, j = 1, \dots, n$

$$\text{Mit 1. folgt } \dot{W}(\tau) = \{ \det[\dot{\xi}_1(\tau), \xi_2(\tau), \dots, \xi_n(\tau)] + \dots + \det[\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \dots, \dot{\xi}_n(\tau)] \} W(\tau) = W(\tau) \sum_{j=1}^n \det(\underbrace{\xi_1(\tau)}_{e_1}, \dots, \underbrace{\dot{\xi}_j(\tau)}_{A(\tau)\xi(\tau)}, \dots, \underbrace{\xi_n(\tau)}_{e_n}) =$$

$$W(\tau) \sum_{j=1}^n \det(e_1, \dots, a_j(\tau), \dots, e_n)$$

$$\text{durch Spaltenumformungen folgt: } \dots = W(\tau) \sum_{j=1}^n \underbrace{\det(e_1, e_2, \dots, a_{jj}(\tau)e_j, \dots, e_n)}_{a_{jj}(\tau)} =$$

$$W(\tau) \cdot \text{spur}(A(\tau))$$

(Fall: bei Tau bekommt man Einheitsmatrix!)

Also  $\dot{W}(\tau) = W(\tau) \cdot \text{spur}(A(\tau))$

Formel für  $W(t)$ : Folgt aus bekannter Formel.

□

## 7. DGLn zweiter Ordnung in Dimension 1

Betrachte DGLn der Form

1)  $\ddot{x}(t) = f(t, x(t))$ , wobei  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $D$  auch.

(1) ist äquivalent zum System erster Ordnung

2) 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = f(t, x(t)) \end{cases} \quad (\text{Jargon: „} \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(t, x) \end{cases} \text{“})$$

Spezialfälle/Beispiele:

### 7.1. Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t), \quad \omega > 0$$

Äqu. zu 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}, \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}(t)$$

Die spezielle Lös'n  $\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$  bilden FS, vgl 3.4

### 7.2. Harmonischer Oszillator mit Reibung

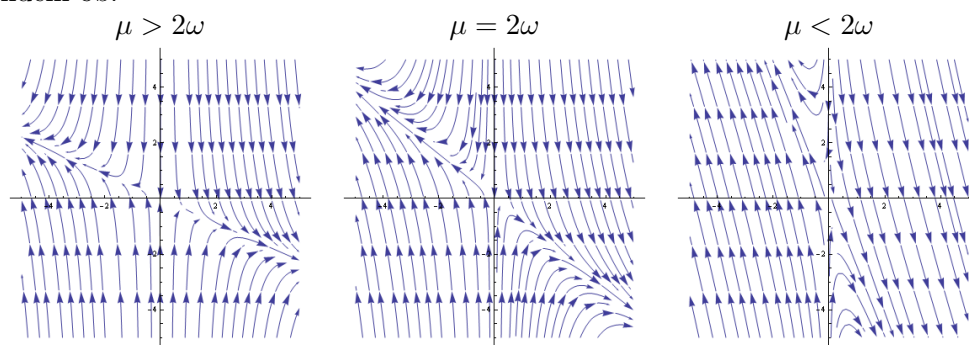
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - \underbrace{\mu \dot{x}(t)}_{\text{Reibungsterm}}, \quad \mu > 0$$

Äqu. System 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) - \mu v(t) \end{cases}$$

oder 
$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \mu & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\text{spur}(A) = -\mu < 0, \quad \det(A) = \omega^2 > 0, \quad \text{EW } \lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Je nachdem ob:



I(i)

Falls  $\mu > 2\omega$ , also  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , gilt:

Die EV  $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$  zum EW  $\lambda$  ( $\lambda = \lambda_1$  oder  $\lambda = \lambda_2$ )

lösen das Gl.System 
$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0, \text{ also } \lambda x = v$$

EV zum negativen EW liegt näher an v-Achse



### 7.3. Harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung ohne Rechnung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \underbrace{\alpha \sin(\nu t)}_{\text{perid. äuß. Kraft}} \quad (\text{nicht autonom})$$

$$\text{Äqu: } \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) - \alpha \sin(\nu t) \end{cases}$$

$$\text{oder } (*) \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sin(\nu t) \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung von } (*) \text{ zum Anf.wert } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}(t) = \int_0^t \exp((t-s)A) \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(s) \end{pmatrix} ds$$

=... ist explizit ausrechenbar (Übung)

### 7.4. DGLen der Form $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$ mit $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(nur bis auf additive Konstante eindeutig)

$$\text{Äqu ist } * \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -V'(x(t)) \end{cases}$$

Sei  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x)$

Falls  $(x, v) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  lösg. von (\*), so ist  $I \ni t \mapsto E(x(t), v(t))$  konstant. (E Erhaltungsgröße, „Integral“ von (\*))

Lösungen verlaufen also innerhalb der Niveaumengen  $E^{-1}(\{c\})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel zu zu 7.4**

1) *Harmonischer Oszillator*  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$

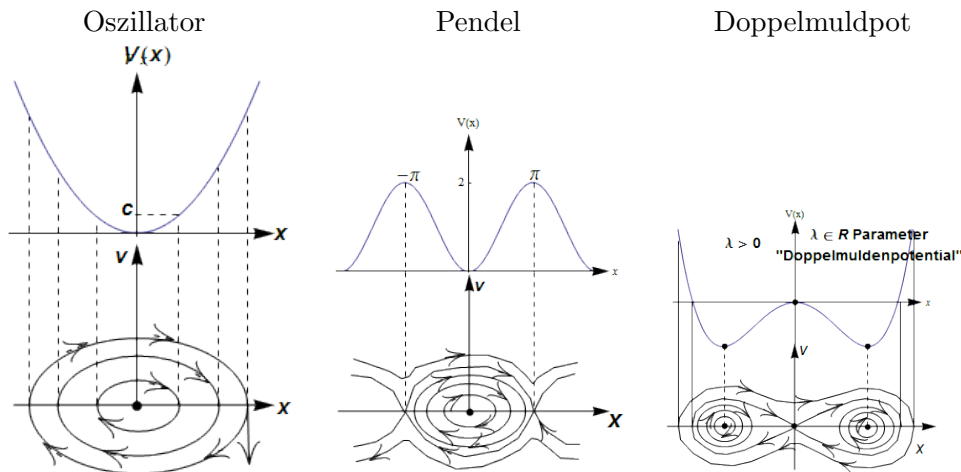
2) Pendel:  $\ddot{x} = -\sin(x(t)) = -(-\cos')(x(t))$ ,

Mit  $V(x) := \underbrace{1 - \cos(x)}_{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}$  :  $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$ ,

$E(x, v) = x > 0 \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{2(c - V(x))}$ , wo  $V(x) \leq c, v = \pm \sqrt{2(c - 1 + \cos(x))}$

3)  $\ddot{x}(t) = \lambda x(t) - x(t)^3 = -V'_\lambda(x(t))$ , wobei  $V_\lambda(x) := -\frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{1}{4}x^4$

Phasenportraits:



Trick: Vorstellung einer in „*Potentialgebirge*“ von  $V$  rollenden Kugel.  
Allerdings: für diese Kugel wäre  $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$  NICHT die richtige DGL.

**7.5. Zusammenhang zwischen  $\ddot{x} =: -V'(x)$  und der im „'Potentialgebirge“ von  $V$  rollenden Kugel**

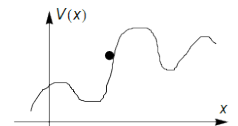
1) Die Energie der Kugel, die sich gemäß  $t \mapsto (x(t), y(t)) = (x(t), V(x(t)))$  bewegt, ist:

(\*)  $\frac{1}{2}\{\dot{x}(t)^2 + [V'(x(t))\dot{x}(t)]^2\} + V(x(t)) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2[1 + [V'(x(t))]^2] + V(x(t))$

Die Fu.  $t \mapsto x(t)$  erfüllt  $\ddot{x}(t) = \frac{-\dot{x}(t)^2 V'(x(t))V''(x(t)) - V'(x(t))}{1+[V'(x(t))]^2}$

folgt durch Diff. von (\*), Abl.= 0

(Zusammenhang von  $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$  nicht offensichtlich!)



2) zur Beschr. der Kugel günstiger, die Bogenlänge längs der Kurve  $\gamma = \{(x, V(x)) | x \in \mathbb{R}\}$  als Variable zu nehmen.

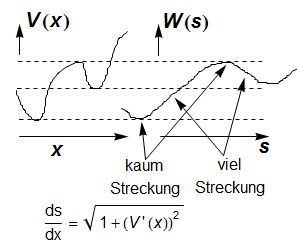
$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + V'(r)^2} dr$

Abb.  $x \mapsto s(x)$  ist streng wachsend, *Diffeomorphismus*  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Umkehrfkt.

heißt  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

Als Fu. von  $s, \dot{s}$  ist die Energie der Kugel:  $\frac{1}{2}\dot{s}^2 + \underbrace{V(\xi(s))}_{=: W(s)} = \frac{1}{2}\dot{s}^2 + W(s)$

(ausführlich:  $\ddot{s}(t) = -W'(s(t))$ ,  $W(S) := V(\xi(s))$ ,  $W(S(X)) = V(X)$ )



$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (V'(x))^2}$

$$S(x) := \int_0^x \sqrt{1 + (V'(r))^2} dr$$

- 3) Die Abb.  $(x, v) \mapsto (y, \omega)$ ,  $y := s(x)$ ,  $\omega := v$   
führt Niveaulinien der Form  $\underbrace{\{(x, v) \mid \frac{1}{2}v^2 + V(x) = c\}}_{\text{enthält Lösungen von } \ddot{x} = -V'(y)}$   
in Niveaulinien der Form  $\underbrace{\{(y, \omega) \mid \frac{1}{2}\omega^2 + W(y) = c\}}_{\text{enthält Lösungen von } \ddot{y} = -W'(y)}$  über.  
Deshalb Äquivalenz der Phasenportraits.

## 8. Existenz und Eindeutigkeit

### 8.1. Satz: Lokaler Ex.- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  off. Intervall,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$

$f$  sei *lokal Lipschitz-stetig* bzgl  $x$ , d.h.  $\forall (t_0, x_0) \in I \times D \exists \delta > 0, L > 0 :$

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \forall x, y \in B(x_0, \delta) : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

*lokale Lipschitzbedingung*

Dann ex.  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in D$  ein Intervall  $J$  mit  $t_0 \in J$  und eine eindeutige Lösung

$$\xi : D \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ des AWP's } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Beweis**

Seien  $t_0, x_0$  wie oben und  $\delta, L > 0$  wie in (\*),  
und so, dass  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(x_0, \delta) \subset I \times D$ .

Sei  $F := \max\{|f(t, x)| \mid t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}\}$  (ste. Fu. auf kp. Menge)

Wähle  $\delta_1 \in (0, \delta]$  mit  $\delta_1 F \leq \delta$ ,  $\delta_1 L \leq \frac{1}{2}$ ,  $J := (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$

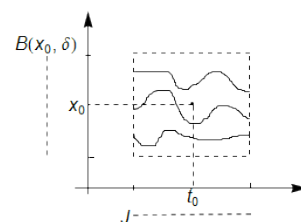
Sei nun  $C := \{\eta \in C^0(J, \mathbb{R}^n) \mid \forall t \in J : \|\eta(t) - x_0\| \leq \delta\}$

Auf  $C$  benutze die durch max-Norm  $\|\eta\|_\infty := \max_{t \in J} \|\eta(t)\|$

induzierte Metrik  $\|\eta_1 - \eta_2\|_\infty = \max_{t \in J} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|$

Damit ist  $C$  ein vollst. metr. Raum

Def.  $T : C \rightarrow C$ ,  $T(\eta)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \eta(s)) ds$



$T$  ist wohldefiniert:

- 1) Für  $\eta \in C$  ist  $f(s, \eta(s))$  definiert für  $s \in J$
- 2)  $s \mapsto f(s, \eta(s))$  ist ste., da  $\eta$  ste. Nach HDI:  $T(\eta)$  dbar. insbes stetig.
- 3) Für  $t \in J, \eta \in C$  ist  $\|T(\eta)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \underbrace{f(s, \eta(s))}_{\in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}} ds \right\| \leq$

$$\underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta_1} F \leq \delta_1 F \leq \delta$$

Also: Auch  $T(\eta) \in C$ .

Weiter: Für  $\eta_1, \eta_2 \in C, t \in J$ :

$$\begin{aligned} \|T(\eta_1)(t) - T(\eta_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \eta_1(s)) - f(s, \eta_2(s))) ds \right\| \leq \\ &\int_{t_0}^t \|f(s, \eta_1(s)) - f(s, \eta_2(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t \underbrace{L \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|}_{\leq \|\eta_1 - \eta_2\|_\infty} ds \leq \\ &\underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta_1} L \|\eta_1 - \eta_2\|_\infty \leq 0.5 \|\eta_1 - \eta_2\|_\infty \end{aligned}$$

Also auch  $\|T(\eta_1) - T(\eta_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\eta_1 - \eta_2\|_\infty$ ,

$T$  kontrahierend mit Kontraktionskonstante  $\frac{1}{2}$ .

Nach Banachschem FPS:  $T$  hat eindeutigen Fixpu.  $\eta^* \in C$

Also  $\eta^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \eta^*(s)) ds$  für  $t \in J$ ,

nach HDI:  $\eta^*$  dbar.,  $\dot{\eta}^*(t) = f(t, \eta^*(t))$  und  $\eta^*(t_0) = x_0$

Jede andere Lösung  $\bar{\eta}$  mit Werten in  $\overline{B(x_0, \delta)}$  würde erfüllen:

$\forall t \in J : \bar{\eta}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{\eta}(s)) ds$  und  $\|\bar{\eta}(t) - x_0\| \leq \delta$ , also auch  
 $\bar{\eta} \in C$  und  $T(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$

□

**8.2. Bemerkung**

Falls  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ste (wie oben) und  $D_2 f$  auf  $I \times D$  und stetig ist,  
dann ist die *lokale Lipschitz-Bedingung* aus 8.1 erfüllt.

Insbes. gilt dies wenn  $f \in C^1(I \times D, \mathbb{R}^n)$ .

**Beweis**

Existiere  $D_2f$  und sei stetig. Sei  $(t_0, x_0) \in I \times D$

Es ex.  $\delta > 0$  mit  $M := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)} \subset I \times D$

Setze  $L := \max_{(t,x) \in M} \|D_2f(t,x)\|_{ind.Norm}$  (ste. Fu. auf kp. Menge)

Für  $(t,x)$  und  $(t,y) \in M$  ist dann  $\|f(t,x) - f(t,y)\|$

$$\underbrace{=}_{MWS} \left\| \int_0^1 D_2f(t, x + s(y-x)) ds (y-x) \right\| \leq L \|y-x\|$$

□

**8.3. Bemerkung**

Die durch  $\eta_0(t) := x_0$ ,  $\eta_{n+1} := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \eta_n(s)) ds$  ( $= (T\eta_n)(t)$ )

definierten Fu'n heißen *Picard-Iterierte* (zu dem geg. AWP).

Sie konvergieren glm. auf  $J$  gegen eine Lösg. des AWP.

Bemerkung zur Eindeutigkeit in 8.1:

Gezeigt wurde bisher nur: Jede Lösg  $\bar{\eta} : J \rightarrow \overline{B(x_0, \delta)}$  stimmt mit  $\eta^*$  überein.

Falls nun  $\tilde{\eta} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  bel. Lösg, so ex.  $\tilde{J} \subset J$  mit  $\tilde{\eta}(\tilde{J}) \subset B(x_0, \delta)$  mit  $t_0 \in \tilde{J}$ .

Dann  $\tilde{\eta} = \eta^*$  auf  $\tilde{J}$ .

Mit diesem Argument sieht man  $\{t \in J \mid \tilde{\eta}(t) = \eta^*(t)\}$  ist offen in  $J$ .

Diese Menge ist auch abg. in  $J$  (klar), damit gleich ganz  $J$ .

Folgt:  $\tilde{\eta} = \eta^*$  auf ganz  $J$ .

**8.4. Folgerung**

Sei  $f$  wie in 8.1

Zu  $(t_0, x_0) \in I \times D$  es ein eindeutiges maximales Ex.intervall  $J_{t_0, x_0} = (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) \subset$

$I$  und eine eindeutige nichtfortsetzbare Lösg.  $x(*, t_0, x_0) : J_{t_0, x_0} \rightarrow D$  von (\*)  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

(Dies ist die „maximale“ Lösg. des AWP (\*))

**Beweis**

1) Sei  $J_1, J_2$  Intervalle um  $t_0$ .

Je zwei Lös'n  $\xi_1 : J_1 \rightarrow D, \xi_2 : J_2 \rightarrow D$  von (\*)

(mit bel.  $(t_0, x_0) \in I \times D$ ) stimmen auf  $J_1 \cap J_2$  überein:

Seien  $\xi_1, \xi_2$  solche Lös'n und  $t_1 \in J_1 \cap J_2$  z.B.  $t_1 > t_0$ .

Dann  $[t_0, t_1] \subset J_1 \cap J_2$

Sei  $M := \{t \in [t_0, t_1] | \xi_1(t) = \xi_2(t)\}$ . M ist abg.,  $t_0 \in M$  ( $\xi_1, \xi_2$  stetig).

M ist auch offen in  $[t_0, t_1]$ : Sei  $\tau \in M$ .

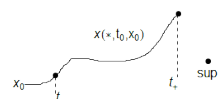
Dann ex. ein off. Int.  $J_3 \subset I, \tau \in J_3$  und eine eind. Lösg.  $\xi_3 : J_3 \rightarrow D$  von

$$(**) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(\tau) = \xi_1(\tau) \end{cases}$$

Wegen Eindeutigkeit  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$  auf  $J_1 \cap J_2 \cap J_3$ . Somit  $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap [t_0, t_1] \subset M$ .

(Also M offen in  $[t_0, t_1]$ .)

Da  $[t_0, t_1]$  zusammenhängend folgt:  $M = [t_0, t_1]$  (insbes.  $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_1)$  (Fall  $t_1 < t_0$  analog))



2) Def:  $t_+(t_0, x_0) := \sup\{t > t_0 | \text{ex. Lösg. von (*) auf } [t_0, t]\}$  (evtl. =  $+\infty$ )

$t_-(t_0, x_0) := \inf\{t < t_0 | \text{ex. Lösg. von (*) auf } [t, t_0]\}$  (evtl. =  $-\infty$ )

def.  $J_{t_0, x_0}$  entsprechend.

Für  $t \in J_{t_0, x_0}$  wähle Lösg. von (\*) auf  $[t_0, t]$  bzw.  $[t, t_0]$ , setze  $x(t, t_0) := \xi(t)$

Dann nach 1:  $x(*, t_0, x_0)$  wohldef. und nach Kostr. Lösg. von (\*).

3)  $x(*, t_0, x_0)$  ist nicht außerhalb von  $J_{t_0, x_0}$  als Lösg. fortsetzbar.

(kurz „ $t_+$ “, „ $t_-$ “)

Klar, falls  $t_+ = \sup I$  und  $t_- = \inf I$

Sei z.B.  $t_+ < \sup I$ , also  $t_+ \in I$ . Wäre  $x(*, t_0, x_0)$  fortsetzbar als Lösg. auf  $[t_-, t_+]$ ,

So gibt es zum AWP (\*\*\*)  $\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_+) = x(t_+, t_0, x_0) \end{cases}$  nach Picard-Lindelöf ein  $\delta > 0$  und eine eind. Lösg.  $\eta : (t_+ - \delta, t_+ + \delta) \rightarrow D$  von (\*\*\*)

$$\text{Die Fu. } \tilde{x} : [t_0, t_+ + \delta), \tilde{x}(t) := \begin{cases} x(t, t_0, x_0) & , t_0 \leq t \leq t_+ \\ \eta(t) & , t_+ < t < t_+ + \delta \end{cases}$$

ist dann Lösg. von (\*) auf  $[t_0, t_+ + \delta]$

Widerspruch zur Wahl  $t_+$ . Analog bei  $t_-$ , also  $x(*, t_0, x_0)$  nicht fortsetzbar.

Bem: Eind'keit von  $J_{t_0, x_0}$  ist klar. Eind'keit von  $x(*, t_0, x_0)$  auf  $J_{t_0, x_0}$  folgt aus Teil 1

□

**8.5. Satz**

In der Sit. von 8.4 sei  $O^+ := \{x(t, t_0, x_0) | t \in [t_0, t_+(t_0, x_0))\}$

Falls  $t_+(t_0, x_0) < \sup(I)$  (Ex.Intervall „nach rechts beschr.“)

So ist  $O^+$  unbeschr. oder  $\text{dist}(O^+, \partial D) = 0$  (Analog für  $t_-(t_0, x_0)$ )



**Beweis**

$$t_+ := t_+(t_0, x_0)$$

Annahme:  $O^+$  beschr.  $O^+ \subset \overline{B(0, R)}$  und  $\varepsilon := \text{dist}(O^+, \partial D) > 0$

$$M := \{y \in D \mid \|y\| \leq R, \text{dist}(y, \partial D) \geq \varepsilon\}.$$

$M$  ist kp. (Heine-Borel) und  $O^+ \subset M$

$$F := \max\{\|f(t, x)\| \mid (t, x) \in [t_0, t_+] \times M\} \text{ (st. Fu. auf kp. Menge)}$$

Für  $t \in [t_0, t_+)$  gilt:  $\|\dot{x}(t, t_0, x_0)\| = \|f(t, x(t, t_0, x_0))\| \leq F$ .

Somit  $x(*, t_0, x_0)$  glm. ste. auf  $[t_0, x_0)$  (sogar: Lipschitz-ste mit Lipschitz-Konst.  $F$ )

Folgt:  $x^* := \lim_{t \rightarrow t_+} x(t, t_0, x_0)$  existiert (Übung)

Wegen  $M$  abg. ist  $x^* \in M \subset D$ .

$$\text{Def. } \tilde{x}(t) := \begin{cases} x(t, t_0, x_0) & , \text{ falls } t \in (t_0, t_+) \\ x^* & , t = t_+ \end{cases}$$

Beh.  $\tilde{x}$  ist Lösg. der Dgl auf  $[t_0, t_+]$ .

**Beweis**

$$\tilde{x} \text{ ist stetig und } \tilde{x}(t) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{x_0}_{(*)} + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds \text{ für } t \in [t_0, t_+).$$

$\tilde{x}$  ste als Fu von  $t$  auf  $[t_0, t_+)$ .

$$x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds \text{ ste Fu. von } t \text{ auf } [t_0, t_+), \text{ also auch auf } [t_0, t_+]$$

Also: Gl. (\*) gilt auf  $[t_0, t_+]$ , folgt  $\dot{\tilde{x}}(t_+) \text{ ex.} = f(t_+, \tilde{x}(t_+))$

□

Widerspruch zur nicht-Fortsetzbarkeit von  $x(*, t_0, x_0)$

□

**8.6. Bemerkung**

- Es gilt auch  $\lim_{t \rightarrow t_+} \min\{\text{dist}(x(t, t_0, x_0), \partial D), \frac{1}{\|x(t, t_0, x_0)\|+1}\} = 0$  (vgl. Amann, gew. DGLen)
- Man kann zeigen:  $t_+(t_0, x_0)$  hängt unterhalb stetig von  $(t_0, x_0)$  ab.  
 $t_-(t_0, x_0)$  hängt oberhalb stetig von  $(t_0, x_0)$  ab.  
 $\forall (t_0, x_0) \in I \times D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \tilde{t}_0 - t_0 < \delta, \|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \Rightarrow t_+(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) > t_+(t_0, x_0) - \varepsilon$
- Der autonome Fall:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist in den Sätzen 8.1-8.5 mit enthalten.  
 (Setze  $\tilde{f}(t, x) := f(x)$  für  $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$ )

**8.7. Folgerung**

In der Sit. von 8.4, 8.5 sei  $K \subset D$  kp. und  $O^+ \subset K$  (für ein geg.  $(t_0, x_0)$ )

Dann ist  $t_+(t_0, x_0) = \sup(I)$  (insbes., falls  $[t_0, \infty) \subset I$ , so  $t_+(t_0, x_0) = \infty$ )

Analog für  $t_-$

**Beweis**

$O^+ \subset K \Rightarrow O^+$  beschr. und  $dist(O^+, \partial D) \geq dist(K \subset D, \partial D) > 0$ , da  $K$  kp,  $\partial D$  abg,  $K \cap \partial D = \emptyset$

Nach 8.5:  $t_+ = sup(I)$

□

**Beispiel zu Konservatives System**

$\dot{\vec{x}}_i = \vec{v}_i$   
 $\dot{v}_i = -\partial_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

Energie  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\vec{v}_i\|_2^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  konst längs Lös'n

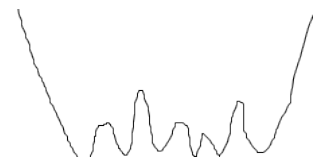
$\vec{x}_i(t), \vec{v}_i(t) \in \mathbb{R}^3$

Energie"fläche" (6n-1 dim Mft im Glücksfall) zum Wert  $c := E^{-1}(\{c\} \subset \mathbb{R}^{6n})$

Falls

- $V$  nach unten beschr. und
- $\lim_{\min_i \|\vec{x}_i\| \rightarrow \infty} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \infty$

So  $\forall c \in \mathbb{R} : E^{-1}(\{c\})$  kp. (Lösungen ex. auf ganz  $\mathbb{R}$ )



**8.8. Bemerkung: Existenzsätze vom Peano-Typ**

Sei  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  nur stetig.  
 Dann auch Existenz lokaler Lösungen von AWPen beweisbar.

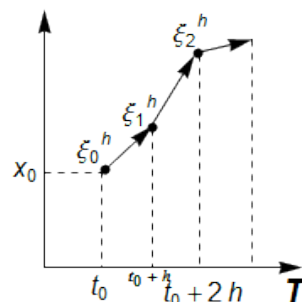
Z.B. kann man zeigen: Das *Eulersche Polynomzugverfahren*:

$\xi_0^h := x_0, \xi_{j+1}^h := \xi_j^h + hf(t_0 + jh, \xi_j^h), (h > 0$  Schrittweite)

$x^h(t) := \xi_j^h + \frac{t - (t_0 + jh)}{h} \cdot (\xi_{j+1}^h - \xi_j^h)$  für  $t \in [t_0 + jh, t_0 + (j+1)h]$  (lineare Interpolation der  $\xi_j^h$ )

definiert Fu'n  $x^h$  mit folgenden Eigenschaften:

Falls  $h^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , so erhält  $(x^{h^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$  (etwa auf  $[0, T]$ ) eine Teilfolge  $(x^{h^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen eine Lösung der DGL konvergiert.



**Beweis**

Beweis mittels Satz von Arzela und Ascoli, bzw. Schauderschen Fixpunktsatz

□

*Globaler Diskretisierungsfehler* von (E):  $O(h)$  (heißt: ex. Konstante  $C > 0$ , Fehler auf  $[0, T] \leq C \cdot h$ )

Andere Verfahren haben höhere Fehlerordnung:  $O(h^P)$

Speziell: *Runge-Kutta-Verfahren* Berechnung gewisser Werte des Vektorfeldes  $k_1, \dots, k_m$ ,

$\xi_{j+1}^h := \xi_j^h + h( \underbrace{c_1 k_1 + \dots + c_m k_m}_{\text{gewichtetes Mittel der } k_j} )$   
 $0 \leq c_j \leq 1, \sum c_j = 1$



RK-Verfahren 4ter Stufe:

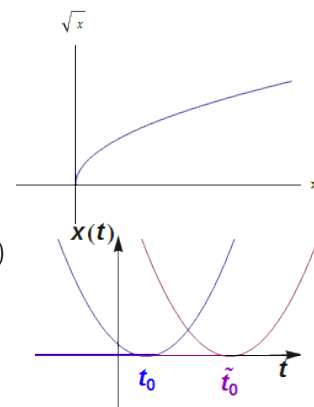
$$\begin{aligned}
 k_1 &:= f(t_0, x_0) \\
 k_2 &:= f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1) \\
 k_3 &:= f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_2) \\
 k_4 &:= f(t_0 + h, x_0 + hk_3) \\
 x_1 &:= x_0 + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\
 \text{Globaler Diskretisierungsfehler: } &O(h^4)
 \end{aligned}$$

**8.9. Beispiel zur Nichteindeutigkeit**

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)} \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \begin{cases} \text{(Nicht lokale Lipschitz-st. bei 0)} \\ 0 & , t \leq t_0 \\ (t - t_0)^2 & , t \geq t_0 \end{cases}$$

Nullfu. ist Lösg, aber für  $t_0 \geq 0$  ist  $x(t) :=$

„Pulverfassgleichung“



**9. Stetige und diffbare Abh'keit (Der Lösgen) von Anf.werten/Parametern**

Sei stets  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $I \subset \mathbb{R}$  off. Int.,  $\Omega \subset \mathbb{R}^P$  offen und  $f : ]t[ \times D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda)$  stetig, lokal Lipschitz-Ste. bzgl.  $x$  (sodass für  $f(*, *, \lambda)$  Picard-Lindelöf anwendbar ist)

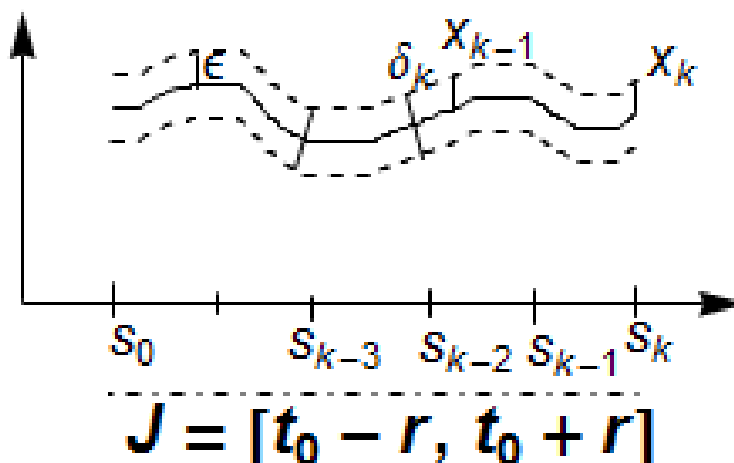
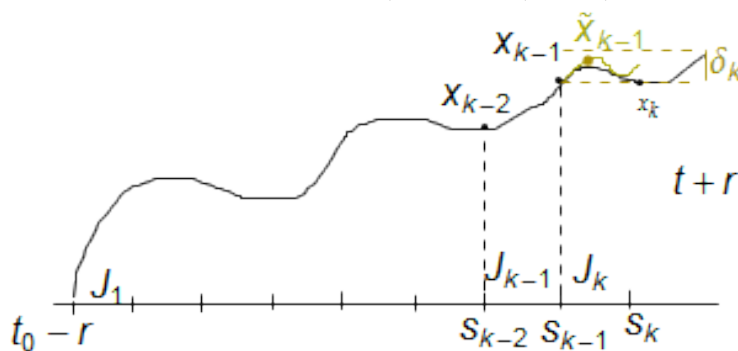
Für  $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times D \times \Omega$  es. dann eine eindeutige, nichtfortsetzbare Lösg.  $x(*, t_0, x_0, \lambda_0)$

von  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  auf dem max. Ex.int  $J_{t_0, x_0, \lambda_0} \subset I$

Sei  $\mathcal{D} := \{(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times I \times D \times \Omega | t \in J_{t_0, x_0, \lambda_0}\}$

**9.1. Satz**

$D$  ist offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^P$  und die Abb.  $\mathcal{D} \rightarrow (t, t_0, x_0, \lambda_0) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n$  ist stetig.



**Beweis**

Idee:

- 1) Sei  $(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathcal{D}$ , z.B.  $t > t_0$   
 Dann  $[t_0, t] \subset \underbrace{J_{t_0, x_0, \lambda_0}}_{\text{offen}}$ . Also ex.  $r > 0$  mit  $J := [t_0 - r, t_0 + r] \subset J_{t_0, x_0, \lambda_0}$
- 2) Für kleine Intervalle:  
 $t_0, x_0, \lambda_0$  sind Parameter für die kontrah. Abb. im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf;  
 Dieser funktioniert auch für  $\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tilde{\lambda}_0$  nahe  $(t_0, x_0, \lambda_0)$ .  
 Stetige Abb'keit der Lösg. über kleine Intervalle folgt damit aus dem parametrisierten Banachschem FPS (Ana 2)
- 3) J kann in endlich viele „genügend kleine“ Intervalle aufgeteilt werden, etwa  
 $J = \underbrace{[s_0, s_1]}_{=: J_1} \cup [s_1, s_2] \cup \dots \cup \underbrace{[s_{k-1}, s_k]}_{=: J_k}$   
 Setze  $x_k := x(s_k, t_0, x_0, \lambda_0)$ . Sei  $\varepsilon > 0$   
 Es ex.  $\delta_k > 0$  mit  $\forall \tilde{x}_{k-1} \in x_{k+1} + B(0, \delta_k) \forall \tilde{\lambda}_0 \in \lambda_0 + B(0, \delta_k)$   
 $x(*, s_{k-1}, \tilde{x}_{k-1}, \tilde{\lambda}_0)$  ex. auf  $[s_{k-2}, s_k]$  hängt stetig von Argumenten ab  
 und  $\|x(*, s_{k-1}, \tilde{x}_{k-1}, \lambda_0) - x(*, t_0, x_0, \lambda_0)\| < \varepsilon$  auf  $J_k$  Es ex.  $\delta_{k-1} > 0 : \forall \tilde{x}_{k-2} \in x_{k-2} + B(0, \delta_{k-1}) \forall \tilde{\lambda}_0 \in \lambda_0 + B(0, \delta_{k-1}) :$   
 $x(*, s_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}, \tilde{\lambda}_0)$  es auf  $[s_{k-2}, s_{k-1}]$ , hängt ste. ab und  $\|x(*, s_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}, \tilde{\lambda}_0) - x(*, t_0, x_0, \lambda_0)\| < \min\{\delta_k, \varepsilon\}$   
 Dann also (Zusammensetzen der Lös'n):  $x(*, s_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}, \tilde{\lambda}_0)$  ex. auf  $[s_{k-2}, s_k]$ ,  
 $\|x(*, s_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}, \tilde{\lambda}_0) - x(*, t_0, x_0, \lambda_0)\| < \varepsilon$  auf  $[s_{k-2}, s_k]$   
 ... (Induktive Fortsetzung)  
 Schließlich  $\exists \delta_1 > 0$  mit  $\forall \tilde{x}_0 \in x_0 + B(0, \delta_1) \forall \tilde{\lambda}_0 \in \lambda_0 + B(0, \delta_1) :$   
 $x(*, \tilde{x}_0, \tilde{\lambda}_0)$  auf  $[s_0, s_k]$  def.,  
 (\*)  $\|x(*, \tilde{x}_0, \tilde{\lambda}_0) - x(*, s_0, x_0, \lambda_0)\| < \varepsilon$  auf J.
- 4) Es folgt\*, dass  $(t - r, t + r) \times (t_0 - r, t_0 + r) \times B(x_0, \delta_1) \times B(\lambda_0, \delta_1) \subset D$   
 \*Benutze  $(t_0 - r, t_0 + r) \subset J, (t - r, t + r) \in J; x(t_2, t_1, *, \lambda_0)$  Homöom.  
 Mit der Abschätzung (\*) folgt auch Ste'keit von  $x(*, *, *, *)$  auf D

□

**9.2. Definition**

Sei  $f \in C^1(I \times D, \mathbb{R})$  und  $J \subset I, x : J \rightarrow D$  Lösg. von  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Die **lineare Variationsgleichung** (lin. Vgl) längs dieser Lösg. ist die DGL.  $\dot{v}(t) =$

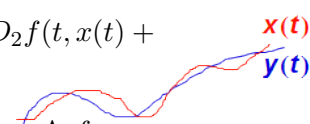
$$\underbrace{D_2 f(t, x(t))}_{\in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ für jedes } t \in J} v(t) \text{ (linear homogene, im Allgemeinen nichtautonome Dgl.)}$$

$\in \mathbb{R}^{n \times n}$  für jedes  $t \in J$

9.3.

Falls x wie oben und y die „benachbarte“ Lösg., so gilt für die Differenz:

$$\Delta(t) := y(t) - x(t) : \dot{\Delta}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t) = f(t, y(t)) - f(t, x(t)) = \int_0^1 D_2 f(t, x(t) + s\Delta(t)) ds (y(t) - x(t)) \quad (MWS) \approx D_2 f(t, x(t))' \Delta t \quad (\text{falls } \Delta \text{ klein})$$



Formale Herleitung der Vgl:  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , Lösg zum Anfangswert  $x_0$ , Anfangszeit  $t_0$  zur Zeit  $t : x(t, t_0, x_0)$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0) \right] = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} x(t, t_0, x_0) \right] = \frac{\partial}{\partial x_0} [f(t, x(t, t_0, x_0))] = D_2 f(t, x(t, t_0, x_0)) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0)}_{v(t)}$$

$\frac{d}{dt} v(t) = D_2 f(t, x(t, t_0, x_0)) v(t)$  erfüllt  $v(t) = \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0)$  die lin. Vgl.längs  $x(*, t_0, x_0)$

[Unterstellung : Existenz von  $\frac{\partial}{\partial x_0} \dots, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_0} \dots$ , Vertauschbarkeit]

Weiter:  $V(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} \underbrace{x(t_0, t_0, x_0)}_{=x_0} = 1$

9.4. Satz: Einfache Form des Gronwalschen Lemmas

Sei  $\varphi : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$  stetig und es gelte:

$$\forall t \in [0, T] : \varphi(t) \leq K + L \int_0^t \varphi(s) ds \quad \text{mit Konstanten } K, L \geq 0$$

Dann  $\forall t \in [0, T] : \varphi(t) \leq K \cdot \exp(Lt)$

**Beweis**

Mit  $\psi(t) := K + L \int_0^t \varphi(s) ds$  ist  $\varphi \leq \psi$

$\psi$  ist diffbar, mit  $\alpha(t) := \psi(t)e^{-Lt}$  gilt  $\alpha(0) = K$  und

$$\dot{\alpha}(t) = \underbrace{\dot{\psi}(t)}_{L\varphi(t)} - L\psi(t) e^{-Lt} = Le^{-Lt} \underbrace{[\varphi(t) - \psi(t)]}_{\leq 0}$$

Also  $\forall t \in [0, T] : \alpha(t) \leq K, \varphi(t) \leq \psi(t) \leq Ke^{Lt}$  □

9.5. Folgerung

Sei  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ste., lokal Lip.-ste. bzgl. x und „linear beschränkt“ im folg. Sinn:

Es ex.  $\alpha, \beta : I \rightarrow [0, \infty)$  ste. mit

$$\forall (t, x) \in I \times D : \|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t)$$

- a) Dann ist jede Lösg von  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  beschr. auf beschränkten Intervallen  $J \subset I$  mit  $\bar{J} \subset I$  ( $\bar{J}$ : Abschluss in  $\mathbb{R}$ )
- b) Insbes. ex., falls  $D = \mathbb{R}^n$ , jede maximale Lösg. auf ganz I (also auf ganz  $\mathbb{R}$ , falls  $I = \mathbb{R}$ )

**Beweis**

b) folgt aus a) und 8.5

a) Sei  $x$  Lösg. auf beschr. Int  $J, \bar{J} \subset I$ .  
 Weiter sei  $t_0 \in J, x(t_0) = x_0, t \in J$

Dann  $\forall t \in J : \|x(t)\| = \|x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds$

$\leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t [\alpha(s)\|x(s)\| + \beta(s)] ds |A_j = \max_{s \in \bar{J}} \alpha(s), B_j = \max_{s \in \bar{J}} \beta(s)$

$\Rightarrow \dots \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t A_j \|x(s)\| ds + B|J|$

Mit Gronwall folgt:  $\forall t \in J : \|x(t)\| \leq (\|x(t_0)\| + B_j|J|) \exp(A_j \underbrace{t - t_0}_{\leq |J|})$

□

**9.6. Folgerung**

Lösen von  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t)$  mit ste. Matrix  $A$  und  $h : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ste. sind eindeutig. und ex. auf ganz  $I$ .

**Beweis**

$f(t, x) := A(t)x + h(t), (t \in I, x \in \mathbb{R}^n)$

$f$  ist ste. zu  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  ex.  $\delta > 0$  und  $\alpha > 0$  mit

$\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] : \|A(t)\| \leq \alpha$

Für solche  $t$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|$

Also  $f$  lokal Lip.ste., j lokale Ex. und Eind'keit, Ex. nichtfortsetzbarer Lösg. folgen.

Setze  $\alpha(t) := \|A(t)\|, \beta(t) := \|h(t)\| (t \in I)$

Dann  $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t) (t \in I, x \in \mathbb{R}^n)$

Beh. folgt aus 9.5b)

□

**9.7. Satz: Diffbare. Abh'keit von Anf.wert für autonome DGLen**

Sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  und für  $x_0 \in D$  sei  $x(*, x_0) : J_{x_0} \rightarrow D$  die max. Lösg.

von  $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

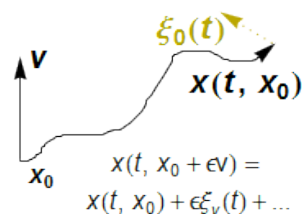
$\mathcal{D} = \bigcup_{x_0 \in D} J_{x_0} \times \{x_0\}$

Dann ex.  $D_2x$  auf  $\mathcal{D}$ , ist stetig und für  $(t, x_0) \in \mathcal{D}, v \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$\underbrace{D_2x(t, x_0)}_{\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} v = \xi_v(t)$ , wobei  $\begin{cases} \xi_v(0) = v \\ \dot{\xi}_v(s) = Df(x(s, x_0))\xi_v(s) \end{cases}$

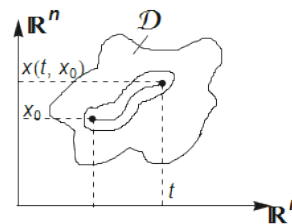
Also  $D_2x(t, x_0)$  ist der Entwicklungsoperator  $U(t, 0)$  zur linearen Vgl. längs  $x(*, x_0)$

Also  $D_2x(0, x_0) = \mathbb{1}, \frac{d}{dt} D_2x(t, x_0) = Df(x(t, x_0)) \cdot D_2x(t, x_0)$



**Beweis**

Sei  $(t, x_0)$  und O.E.  $t \geq 0$   
 Es ex.  $\delta_0 > 0$  mit  $[0, t] \times B(x_0, \delta) \subset \mathcal{D}$   
 ( $\mathcal{D}$  offen,  $\{(s, x(s, x_0)) | s \in [0, t]\}$ , kpkt.)



Für  $v \in B(0, \delta_0)$  betrachte  
 $\Delta_v(s) := x(s, x_0 + v) - x(s, x_0) \quad (s \in [0, t])$

Es gilt:  $\dot{\Delta}_v = \int_0^1 \underbrace{Df(x(s, x_0) + \theta' \Delta_v(s))}_{=: A(s, v)} d\theta' \Delta_v(s)$

Für  $w \in B(0, \delta_0)$  seien  $U(s, 0, w)$  die Entwicklungsope'r'n zur linearen DGL

$\dot{y}(s) = A(s, w)y(s)$ , also  $\begin{cases} U(0, 0, w) = \mathbb{1}_n \text{ (Einheitsmatrix)} \\ \partial_1 U(s, 0, w) = A(s, w)U(s, 0, w) \end{cases}$

Nach 9.6 sind diese für  $s \in [0, t]$  und  $w \in B(0, \delta_0)$  definiert und nach 9.1 ist die Abb'  $[0, t] \times B(0, \delta_0) \ni (s, w) \mapsto U(s, 0, w) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig.

Sei nun  $v \in B(0, \delta_0)$ . Mit der Lösung  $\xi_v$  der Vargl. längs  $x(*, x_0)$  (mit  $\xi_v(0) = v$ ) gilt:

$\dot{\xi}_v(s) = Df(x(s, x_0))\xi_v(s) = A(s, 0)\xi_v(s)$ .

Also  $\xi_v(t) = U(t, 0, 0)v$ .

Weiter  $\Delta_v(t) = U(t, 0, v)v$

Zu  $\varepsilon > 0$  ex.  $\delta \in (0, \delta_0]$  mit  $\|v\| < \delta \Rightarrow \|U(t, 0, 0) - U(t, 0, v)\| < \varepsilon$

$\|g(x_0 + v) - g(x_0) - Lv\| \leq \varepsilon\|v\|$

Für solche  $v$  ist  $\|x(t, x_0 + v) - x(t, x_0) - \xi_v(t)\| = \|\Delta_v(t) - \xi_v(t)\| = \|[U(t, 0, v) - U(t, 0, 0)]v\| \leq \underbrace{\|U(t, 0, v) - U(t, 0, 0)\|}_{< \varepsilon} \|v\| \leq \varepsilon\|v\|$

Also ex.  $D_2x(t, x_0), D_2x(t, x_0)v = \xi_v(t)$ .

Rest klar. □

**9.8. Bemerkung**

Satz 9.7 zeigt, dass

$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, x_0) \text{ ex. und } = \frac{\partial}{\partial x_0} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0)}_{f(x(t, x_0))} = Df(x(t, x_0)) \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, x_0)$

Beweis klar.

**9.9. Satz**

$f \in C^1(I \times D \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow [\mathcal{D} \nu(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n]$  ist  $C^1$  und:

a)  $\partial_1 x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = f(t, x(\dots), \lambda)$

Weiter gilt mit den **Evolutionsope'r'n**  $U(t, t_0, x_0, \lambda)$  zur Vargl. längs  $x(*, t_0, x_0, \lambda)$

(also:  $\begin{cases} U(t_0, t_0, x_0, \lambda) = \mathbb{1}_n \\ \partial_1 U(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2f(t, x(\dots), \lambda) \cdot U(t, t_0, x_0, \lambda) \end{cases}$ )

b)  $\partial_2 x(t, t_0, x_0, \lambda) = -U(t, t_0, x_0, \lambda)f(t_0, x_0, \lambda)$

$$c) \partial_3 x(t, t_0, x_0, \lambda) = U(t, t_0, x_0, \lambda)$$

$$d) \partial_4 x(t, t_0, x_0, \lambda) = \int_{t_0}^t U(t, s, x_0, \lambda) \cdot D_3 f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) ds$$

**Beweis**

Betr. folgendes System in  $D \times \mathbb{R} \times \Lambda \times \mathbb{R}$

$$(2) \begin{cases} \dot{y}(t) = f(\tau(t) + \theta(t), y(t), \lambda(t)) \\ \dot{\theta}(t) = 1, \dot{\lambda}(t) = 0, \dot{\tau}(t) = 0 \end{cases}$$

$$x \text{ ist Lösg. von (1) } \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ auf } J_{t_0, x_0, \lambda_0}$$

$$\Rightarrow y(t) := x(t_0 + t, t_0, x_0, \lambda_0)$$

$$\theta(t) := t, \lambda(t) = \lambda_0, \tau(t) = t_0$$

Ist Lösg von (2) auf  $J_{t_0, x_0, \lambda_0} - t_0$

$$\text{Mt } y(0) = x_0, \theta(0) = 0, \lambda(0) = \lambda_0, \tau(0) = t_0$$

Umgekehrt: falls  $y, \theta, \lambda, \tau$  Lösg von (2) mit  $\theta(0) = 0, y(0) = x_0$ ,

so definiert  $x(t) := y(t - t_0)$  Lösg. von (1).

Sei  $\tilde{\mathcal{D}}$  der Definitionsbereich der Lösgen.  $Z = (y, \theta, \lambda, \tau)$  von (2).

Die Abb.  $\mathcal{D} \ni (t, t_0, x_0, \lambda_0) \mapsto (t - t_0, x_0, 0, \lambda_0, t_0) \in \tilde{\mathcal{D}}$  ist  $C^\infty$

Nach 9.7: Lös'n von (2) sind  $C^1$  auf  $\tilde{\mathcal{D}}$

Wegen  $x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = y(t - t_0, x_0, 0, \lambda_0, t_0)$  folgt:  $x$  ist  $C^1$  auf  $\mathcal{D}$

Folgt auch: Abl'n von  $x$  nach  $t_0, x_0, \lambda_0$  ist nach  $t$  diffbar. und Abl'n vertauschen. □

**Beweis**

zu den Formeln:

a) klar

$$c) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial t} (\dots) = \frac{\partial}{\partial x_0} [f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)] \\ = D_2 f(t, x(\dots), \lambda_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$$

$$\text{Folgt: } \frac{\partial}{\partial x_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = U(t, t_0)$$

$$b) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{\partial}{\partial t} x(\dots) = \frac{\partial}{\partial t_0} [f(\dots)] = A(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$$

$$\text{und } \partial_x x(t_0, t_0, x_0, \lambda_0) = -f(t_0, x_0)$$

$$\text{Also } \partial_2 x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = U(t, t_0)[-f(t_0, x_0)]$$

$$d) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda_0} [f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)] = \underbrace{D_2 f(t, x(\dots))}_{A(t)} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} x(\dots) +$$

$$D_3 f(t, x(\dots), \lambda_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_0} \underbrace{x(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}_{x_0} = 0, \text{ also Var.d.Konst.}$$

$$\partial_3 x(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \int_{t_0}^t U(t, s) D_3 f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) ds$$

□

### 9.10. Satz

Sei  $k \geq 1$ ,  $f \in C^k(I \times D \times \Lambda, \mathbb{R}^n) \Rightarrow x(*, *, *, *)$  ist  $C^k$  auf  $\mathcal{D}$

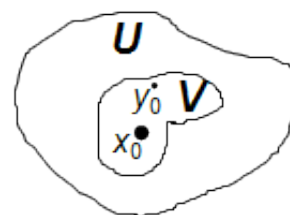
#### Beweis

Induktion:  $k = 1$ : Bekannt (9.9)

$k \rightarrow k + 1$ : Die Abl'n erster Ordnung von  $x(\dots)$  sind nach 9.9 durch Lösgen von DGLen, in denen die auftretenden Fu'n  $f$ ,  $Df$   $C^k$  sind und die ebenfalls auftretende Fu.  $x$  auch  $C^k$  ist nach Ind.-Annahme. □

## 10. Stabilität

Sei  $f \in C^1(I \times D, \mathbb{R}^n)$ ,  $\sup(I) = \infty$   $D \ni x_0$  sei Gleichgew. von  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  d.h.  
 $\forall t \in I : f(t, x_0) = 0$



### 10.1. Definition

Die Lösg.  $t \mapsto x_0$  von  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  heißt

- Liapunov-stabil**, falls gilt:  $\forall t_0 \in I \forall U$  Umg. von  $x_0 \exists$  Umg  $V \subset U$  von  $x_0$ , sodass:  
 $\forall t \geq t_0 \forall y_0 \in V : x(t, t_0, y_0) \in U$  (zu lesen als: ist definiert und bleibt in U)
- gleichmäßig stabil, falls gilt:  
Für jede Umg. U von  $x_0$  ex. Umg  $\lambda_0$  von  $x_0$ , sodass  
 $\forall t_0 \in I \forall t \geq t_0 \forall y_0 \in V : x(t, t_0, y_0) \in U$
- gleichmäßig asymptotisch stabil**, falls sie glm stabil ist und eine Umg. W von  $x_0$  ex. mit  $\forall t_0 \in I \forall y_0 \in W : x(t, t_0, y_0) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} x_0$

(Noch mehr Stabilitätsbegriffe, auch für nichtkonstante Lös'n)

### 10.2. Satz: Prinzip der linearisierten Stabilität

Betr.  $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, x(t))$ , mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$g \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  (reicht Nullumg)

Vor'n:  $\forall t \geq 0 : g(t, 0) = 0, \mathbb{R}^{n \times n} \ni D_2g(t, 0) = 0$  und

$\forall c > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B(0, \delta) \forall t \in \mathbb{R} : \|D_2g(t, x)\| \leq c$

Es gelte  $\rho := \max\{\Re(\lambda) \mid \lambda \text{ EW von } A\} < 0$

Dann ist die Null-Lösg. glm. asympt. stabil

**Beweis**

Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $\rho + \varepsilon < 0$ . Nach 5.7:

$$\exists k > 0 : \forall t \geq 0 : \|\exp(tA)\| \leq k e^{(\rho+\varepsilon)t}$$

Wähle  $c > 0$  mit  $\rho + \varepsilon + kc < 0$

Zu diesem  $c$  wähle  $\delta > 0$  wie in der Vor. Dann nach MWS:

$$\forall x, y \in B(0, \delta) \forall t \in \mathbb{R} : \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq c \|x - y\|$$

Für jede Lösung  $x$ , die auf einem Intervall  $[t_0, T]$  def. ist  $x(t_0) = x_0 \in B(0, \delta)$  und  $x([t_0, T]) \subset B(0, \delta)$  erfüllt, gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0 : \|x(t)\| &= \|\exp((t-t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s, x(s))ds\| \leq \\ &\leq k e^{(\rho+\varepsilon)(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^t k e^{(\rho+\varepsilon)(t-s)} c \|x(s)\| ds \end{aligned}$$

Mit  $y(t) := \|x(t)\| e^{-(\rho+\varepsilon)(t-t_0)}$  folgt:

$$y(t) \leq k \|x_0\| + \int_{t_0}^t k c e^{(\rho+\varepsilon)(t_0-s)} \|x(s)\| ds = k \|x_0\| + k \int_{t_0}^t \|y(s)\| ds$$

Nach Gronwall:  $\forall t \in [t_0, T] : y(t) \leq k \|x_0\| e^{kc(t-t_0)}$

$$\Rightarrow x(t) \leq k \|x_0\| e^{(\rho+\varepsilon+kc)(t-t_0)}$$

Beh.: Für  $x_0 \in B(0, \frac{\delta}{k})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  ex.  $x(*, t_0, x_0)$  auf  $[t_0, \infty)$  und

$$\forall t \geq t_0 : x(t, t_0, x_0) \in \overline{B(0, \delta)}, x(t, t_0, x_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

**Beweis**

Sei  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times B(0, \frac{\delta}{k})$ .

Ann.:  $x := x(*, t_0, x_0)$  ex. nicht auf  $(t_0, \infty)$  oder verlässt  $\overline{B(0, v\delta/k)}$

In beiden Fällen ex. (vgl. 8.4)  $t \geq t_0$  mit  $\|x(t)\| = \delta$ , so dass  $x([t_0, T]) \subset \overline{B(0, \frac{\delta}{k})}$

$$\text{Dann nach (1): } \|x(t)\| \leq k \underbrace{\|x_0\|}_{\leq \frac{\delta}{k}} \underbrace{e^{\dots}}_{\leq 1} \leq \delta$$

Also Widerspruch zu  $\|x(t)\| = \delta$

□

Sei

$U$  umg von  $x_0$ , dann ex.  $\delta_u \in (0, \delta)$  mit  $B(0, \delta_u) \subset U$  und falls  $x_0 \in B(0, \frac{\delta_u}{k})$  und  $t_0 \in I$ , so gilt:  $x(*, t_0, x_0)$  ist auf  $[t_0, \infty)$  def. und erfüllt  $\|x(t)\| \leq k \|x_0\| e^{(\rho+\varepsilon+kc)(t-t_0)}$

$$\forall t \geq t_0 : \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| k < \delta_u, \text{ also } x(t, t_0, x_0) \in U$$

□

**10.3. Prinzip der linearisierten Stabilität im autonomen Fall**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $o \in D$ ,  $f(o) = 0$

Falls mit  $A := Df(o)$  gilt:

$$\Re(\sigma(A)) < 0 \text{ (gemeint: } \forall \lambda \in \sigma(A) \text{ (EW von } A): \Re(\lambda) < 0)$$

So ist die Nulllösung von  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  asymptotisch stabil mit exponentieller Konvergenz.



**Beweis**

$f(x) = Ax + g(x)$ ,  $g(x) = f(x) - Ax = f(x) - D(f(o))x$ . Dann  $Dg(o)=0$ , Bedingung  $\forall c > 0 \exists$  Umgebung von 0, in der  $\forall t \in \mathbb{R} : \|D_2g(t, x)\| \leq c$  offenbar erfüllt □

**10.4. Bemerkungen**

1) Entspr. für Gleichgewicht  $x \neq 0$  von  $\dot{x} = f(t, x)$  oder von  $\dot{x} = f(x)$ , Transformation

$$y := x - x_0, \dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \underbrace{f(t, x_0 + y(t))}_{\tilde{f}(t, y(t))}$$

Für  $\dot{y}(t) = \tilde{f}(t, y(t))$ : Null-Gleichg.Lsg

$$D_2\tilde{f}(t, 0) = D_2f(t, x_0)$$

2) Man sieht aus (1) im Beweis von 10.2:

Stärker negativer Realteil ( $\rho$  kleiner,  $|\rho|$  größer) erlaubt größere Lipschitzkonstante  $c$  für die Nichtlinearität  $g$ , damit größere Nullumgebung, die noch zum „*Einzugsbereich*“ der Null-Lösg gehört.

**10.5. Definition**

Sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Eine Fu.  $V \in C^1(D, \mathbb{R})$  heißt *Liapunov-Funktion* für  $f$  (oder: für den Fluss zum VF  $f$ ), falls  $V$  längs Lösgn.

von  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  fallend ist, d.h.

für jede solche Lösg. ist  $\frac{d}{dt}[V(x(t))] \leq 0$

Gleichbedeutend ist:  $\forall x_0 \in D : \langle \nabla V(x_0), f(x_0) \rangle \leq 0$

Strikte Liapunov-Fu.  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in D, f(x_0) \neq 0 : \langle \nabla V(x_0), f(x_0) \rangle < 0$

Manchmal benutzte Notation:  $\dot{V}(x_0)$  für  $\frac{d}{dt}|_{t=0}[V(x(t, x_0))]$  (Lsg., die zur Zeit dem Wert  $x_0$  haben.)

$= \langle \nabla V(x_0), f(x_0) \rangle$ , „*orbitale Ableitung*“ von  $V$

$$\dot{V}(x_0) = (\partial_{f(x_0)}V)(x_0)$$

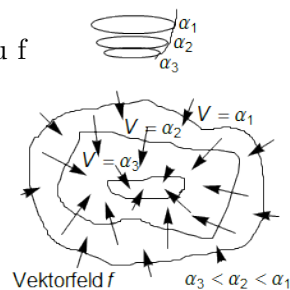
Bemerkung:

1) Falls  $f = -\nabla V$  für ein  $V \in C^2(D, \mathbb{R})$ , so ist  $V$  Liapunov-Fu. zu  $f$

Die „meisten“  $f$  sind aber keine Gradientenfelder

2)  $V$  Liapunov-Fu zu  $f$  bedeutet grob gesagt:

$\forall x_0 \in D : f(x_0)$  zeigt „in etwa“ in Richtung  $-\nabla V(x_0)$



**10.6. Folgerung**

Falls  $V$  Liapunov-Fu zu  $f$ , so sind die Subniveaumengen  $\{x \in D | V(x) \leq \alpha\}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) vorwärts invariant unter dem Fluss zu  $\dot{x} = f(x)$

**10.7. Satz: Stabilitätskriterium, Spezialfall der „direkten Methode von Liapunov“**

Sei  $V$  strikte Liapunov-Fu. zu  $f$  und  $x_0 \in D$  sei

- isolierte NS von  $f$
- striktes Min von  $V$

Dann ist  $x_0$  asymptotisch stabil (für  $\dot{x} = f(x)$ ).

**Beweis**

O.E. sei  $x_0 = 0, V(0) = 0$

Sei  $U$  Umg. von  $0$ . Es ex.  $\delta > 0$  mit

$$\text{i) } \overline{B(0, \delta)} \subset U \cap D$$

$$\text{ii) } \forall x \in \overline{B(0, \delta)} \setminus \{0\} : V(x) > 0, f(x) \neq 0$$

Dann  $\alpha := \min_{\|x\|=\delta} V(x) > 0$

$K := \{x \in \overline{B(0, \delta)} \mid V(x) \leq \frac{\alpha}{2}\}$  ist kp. Umg. von  $0$

Beh.:  $y_0 \in K \Rightarrow \forall t \in [0, t^+(y_0)) : x(t, y_0) \in K$

**Beweis**

Für  $t \in [0, t^+(y_0))$  ist  $V(x(t, y_0)) \leq \frac{\alpha}{2}$ , da  $V$  längs Lös'n abnimmt.

Wie  $x(t, y_0) \in \partial B(0, \delta)$  für ein  $t \geq 0$ , so wäre  $V(x(t, y_0)) \geq \alpha$ , Wid.

Also:  $\forall t \in [0, t^+(y_0)) : \|x(t, y_0)\| < \delta$

□

Folgt:  $\forall y_0 \in K : t^+(y_0) = \infty$  (vgl 8.7)

Also:  $\forall y_0 \in K \forall t \in [t, \infty) : x(t, y_0) \in K \subset \overline{B(0, \delta)} \subset U$

(Stabilität gezeigt)

Beh.: Für  $K$  wie oben,  $y_0 \in K$  gilt:  $x(t, y_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

**Beweis**

Es ex.  $\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{V(x(t, y_0))}_{\text{fallend, durch 0 beschr.}}$

Die Menge  $L := \{y \in K \mid V(y) \geq \lambda\}$  ist kp.

und  $\dot{V} = \langle \nabla V, f \rangle$  hat ein Maximum  $\mu_1$  auf  $L$  und  $\mu_1 < 0$

(Annahme:  $\lambda > 0$ )

Folgt:  $\forall t \geq 0 : \frac{d}{dt}(V(x(t, y_0))) \leq \mu_1 < 0$ , Wid.

Also  $\lambda = 0, V(x(t, y_0)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Ann:  $x(t, y_0) \not\rightarrow 0$ , Dann ex.  $\varepsilon \in (0, \delta]$  und  $(t_j), t_j \rightarrow \infty$  mit  $\|x(t_j, y_0)\| \geq \varepsilon (\forall j \in \mathbb{N})$

Dann  $\forall j \in \mathbb{N} : V(x(t_j, y_0)) \geq \min_{\substack{y \in K \\ \|y\| \geq \varepsilon}} V(y) > 0$  ( $\varepsilon \leq \delta, V > 0$  auf  $\overline{B(0, \delta)} \setminus \{0\}$ ),

Wid zu  $V(x(t_j, y_0)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Also  $x(t, y_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

□

□

**Beispiel zu 10.7**

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2 - \sin(y)) \\ \dot{y} = -y(2 \cos(x)) \end{cases}$$

$$V(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \|(x, y)\|_2^2$$

$\dot{V}(x, y) = x(-x(2 - \sin(y))) + y(-y(2 + \cos(x))) = -2x^2 - 2y^2 + x^2 \sin(y) - y^2 \cos(x) < 0$ , falls  $(x, y) \neq (0, 0)$  Mit 10.7 bzw. 10.8 folgt: Alle Lös'n sind auf  $[0, \infty)$  def. und konv. gegen  $(0, 0)$

**10.8. Satz: Globale Version von 10.7**

Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  strikte Liapunov-Fu. zu  $f : \mathbb{R}^n \leftarrow$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  sei

- striktes globales Min von  $V$ .
- einzige NS von  $f$ .

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  sei die Subniveaumenge  $\{y \in \mathbb{R}^n | V(y) \leq \alpha\}$  kp.

Dann sind alle Lös'n  $x(*, y_0)$  ( $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ) auf  $[0, \infty)$  def. und  $x(t, y_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0$

**11. Periodische Lös'gen**

Sei  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  und  $p : \mathbb{R} \rightarrow D$  sei periodisch (nicht konstant) Lösg. von  $\ddot{x}(t) = f(x(t))$  mit minimaler Periode  $T$

Die lineare Vargl. längs  $p$  ist dann  $\dot{v}(t) = Df(p(t))v(t)$

Seien  $U(t, s)$  die Entwicklungsoperatoren hierzu.

Mit der allg. Lösg.  $x(*, x_0)$  der DGL (mit  $x(0, x_0) = x_0$ ) gilt (vgl. Kap. 9):

$$D_2 x(t, p(0)) = U(t, 0)$$

**11.1. Definition**

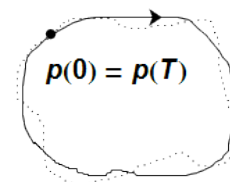
$M := U(T, 0) = D_2 x(T, p(0))$  heißt *Monodromieoperator* (-Matrix) zu der period. Lösg.

Die EW von  $M$  heißen Floquet-Multiplikatoren (der per. Lösg.)

**11.2. Bemerkung**

Für  $\tau \in \mathbb{R}$  ist  $p(*, \tau)$  per. Lösg. mit dem selben Orbit wie  $p$ .

Die FM ihrer Vielfachheiten, JNF von  $M$  hängen nicht von  $\tau$  ab.



**Beweis**

$\tilde{p}(t) = p(t + \tau)$ ,  $\tilde{M}$  Monodromieop. hierzu.

$$\text{Mit } \begin{cases} \dot{\tilde{U}}(t, s) = Df(\tilde{p}(t))\tilde{U}(t, s) \\ \tilde{U}(s, s) = I \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \dot{U}(t, s) = Df(p(t))U(t, s) \\ U(s, s) = 1 \end{cases}$$

gilt:  $\tilde{U}(T, 0) = \tilde{M}$ ,  $U(T, 0) = M$

Behauptung:  $\forall t \geq 0 : \tilde{U}(t, 0) = U(t + \tau, 0)U(\tau, 0)^{-1}$

**Beweis**

Für  $t=0$  OK

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t, 0) = Df(\tilde{p}(t))\tilde{U}(t, 0) = Df(p(t + \tau))\tilde{U}(t, 0)$$

$$\frac{d}{dt}[U(t + \tau, 0)U(\tau, 0)^{-1}] = Df(p(t + \tau))U(t + \tau, 0)U(\tau, 0)^{-1}$$

Mit Eindeutigkeit folgt Beh. □

$$\text{Es folgt: } \tilde{M} = \tilde{U}(T, 0) = \underbrace{U(T + \tau, 0)}_{=U(T+\tau, T)U(T, 0)} U(\tau, 0)^{-1}$$

$$= \underbrace{U(T + \tau, T)}_{=U(\tau, 0)} \underbrace{U(T, 0)}_{=M} U(\tau, 0)^{-1}$$

$U(\tau, 0)$  und  $U(T + \tau, T)$  als Fu. von  $r$  erfüllen das selbe AWP

$$\tilde{M} = U(\tau, 0)MU(\tau, 0)^{-1}$$

( $\tilde{M}, M$  konjugiert)

Beh. folgt □

**11.3. Folgerung**

$\dot{p}$  ist Lösg der Vargl. längs  $p$  und 1 ist stet FM (der triviale FM).

Es gilt:  $M\dot{p}(0) = \dot{p}(0)$

**Beweis**

$$\dot{p}(t) = f(p(t)), \quad (\dot{p})'(t) = Df(p(t))\dot{p}(t)$$

$$\text{Somit da } \dot{p}(0) = \dot{p}(T) : \quad \dot{p}(T) = \underbrace{U(T, 0)}_{=M}\dot{p}(0) = M\dot{p}(0) = \dot{p}(0)$$

□

**11.4. Folgerung**

a) Falls  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die FM von  $p$  sind (jeder so oft wie es der alg. Vielf. entspricht), so gilt:

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \exp \left[ \int_0^T \text{div}(f(p(t))) dt \right]$$

b) Falls  $n=2$ , so sind die FM  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = \exp \left[ \int_0^T \text{div}(f(p(t))) dt \right]$

**Beweis**

zu a):

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det M = \det(U(T, 0)) = W(T) \quad (\text{Wronski-Determinante})$$

$$W(0) = 1, \quad \dot{W}(t) = \underbrace{\text{spur}(Df(p(t)))}_{(\text{div}(f))(p(t))} \cdot W(t) = [(\text{div}(f))(p(t))] \cdot W(t)$$

$$W(T) = \exp \left[ \int_0^T (\text{div}(f))(p(t)) dt \right]$$

□

**11.5. Satz**

Falls 1 algebraisch einfacher FM von  $p$  und für alle anderen FM  $\lambda$  gilt:  $|\lambda| < 1$ , so ist  $p$  stabil in folgendem Sinn:

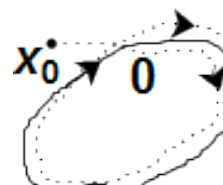
Es ex. Umg  $U$  von  $O := \{p(t) | t \in \mathbb{R}\}$ , sodass:

$$\forall x_0 \in U : t^+(x_0) = \infty, \quad \text{dist}(x(t, x_0), 0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

**Bemerkung:** Es gilt sogar  $\forall x_0 \in U \exists \theta \in [0, T) :$

$$\|x(t, x_0) - p(t + \theta)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ exponentiell}$$

$\theta$ : asymptotische Phase

**11.6. Folgerung**

Falls  $n=2$  und  $\int_0^T (\text{div}(f)(p(t))) dt < 0$ , so ist  $p$  stabil

**Beispiel zu 11.6**

$$\begin{cases} \dot{x} = y - (\varepsilon - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} = -x + 2(\varepsilon - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

hat für  $\varepsilon > 0$  die per. Lösg.  $\begin{cases} x(t) = \varepsilon \sin(t) \\ y(t) = \varepsilon \cos(t) \end{cases} = p(t)$

$$\text{div}(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)) = -(\varepsilon^2 - x^2 - y^2) + 2x^2 + 2(\varepsilon^2 - x^2 - y^2) - 4y^2 = (\varepsilon^2 - x^2 - y^2) + 2(x^2 - 2y^2)$$

$$\text{div}(f(p(t))) = 2\varepsilon^2(\sin^2(t) - 2\cos^2(t))$$

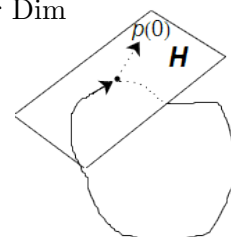
$$\int_0^{2\pi} \text{div}(f(p(t))) dt = 2\varepsilon^2 \cdot (-I) < 0,$$

$$I := \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt$$

Also  $p$  stabil

**11.7. Bemerkung/Definition: Poincare-Abb.**

Sei  $p$  per. Lösg. (wie oben) und  $H \subset \mathbb{R}^n$  *Hyperebene* (affiner Unterraum der Dim  $n-1$ , also *Kodimension* 1)



$$p(0) \in H, \quad H = p(0) + H_0$$

$H_0$ : Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{p}(0) \in H_0$

Dann ex. Umg  $U$  von  $p(0) \in \mathbb{R}^n$ , ein Intervall  $J$  mit  $T \in J$  und  $\tau : U \rightarrow J$  („*Treffzeit*“) mit:

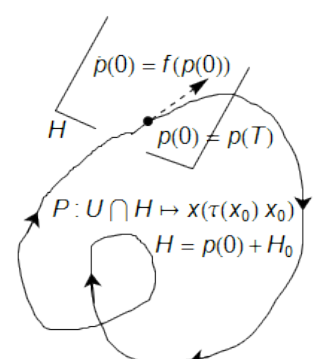
$$\forall x_0 \in U \forall t \in J : x(t, x_0) \in H \Leftrightarrow t = \tau(x_0)$$

Der Abb.  $P : U \cap H \ni x_0 \mapsto x(\tau(x_0), x_0) \in H$  heißt *Poincare-* oder *Wiederkehrabb.* (zu  $p$  und  $H$ )

$P$  ist  $C^1$  (gemeint:  $u - p(0) \ni v \mapsto p(p(0) + v) - p(0) \in H_0$  ist  $C^1$ )

**Beweis**

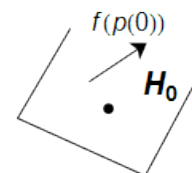
Es ex. *lineares Funktional*.  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H_0 \supset \text{Ker}(h)$ , speziell  $h(\dot{p}(0)) \neq 0$   
 Es ist für  $x(t, x_0) \in H \Leftrightarrow h(x(t, x_0) - p(0)) = 0$   
 Es ex. Umgebung  $U_n$  von  $p(0)$  und ein Intervall  $J_1$  mit  $T \in \overset{\circ}{J}_1$ , sodass  $\forall x_0 \in U_1 : x(*, x_0)$  auf  $J_1$  def.  
 Def:  $F : J_1 \times U_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x_0) := h(x(t, x_0) - p(0))$   
 Dann ist  $F \in C^1, \quad F(T, p(0)) = 0$   
 $\partial_1 F(T, p(0)) = h(\underbrace{\dot{x}(T, p(0))}_{\dot{p}(0) = \dot{p}(0)}) = H(f(p(0))) \neq 0$   
 Existenz von  $\tau$  behauptet  
 Folgt damit aus dem Satz über impliz. Fu'n  
 Rest leicht



**11.8. Satz**

$$\mathbb{R}^n = H_0 \oplus \mathbb{R} \cdot f(p(0))$$

Sei  $P$  Poincare-Abb wie oben.



- a) Sei  $pr$  die Projektion auf  $H_0$  parallel zu  $f(p(0))$ .  
 (für  $V \in \mathbb{R}^n, v = v_0 + \lambda f(p(0)), v_0 \in H_0 : pr(v) = v_0$ )  
 Es gilt:  $L(H_0, H_0) \ni D(P(p(0))) = pr \circ M|_{H_0}$   
 Monotonie op. zu  $p$  und  $P(0)$ ,  
 $M = D_2x(T, p(0))$

- b) EW und Vielfachheiten von  $DP(p(0))$  hängen nicht von der Wahl von  $H$  oder des Punktes auf der period. Lösg. ab.

**Beweis**

Sei  $x_0 := p(0)$

a)  $P(y) = x(\tau(y), y)$  für  $y$  nahe  $x_0$  und für  $v \in H_0$  ist

$$DP(x_0)v = \underbrace{D_1x(T, x_0)}_{\in \mathbb{R} \cdot f(p(0))} \underbrace{D\tau(x_0)v}_{=: \lambda \in \mathbb{R}} + \underbrace{D_2x(T, x_0)v}_{=M} = \lambda \cdot f(p(0)) + Mv$$

Da  $\text{Bild}(P) \subset H$ , ist

$\text{Bild}(DP(x_0)) \subset H_0$ , also

$$DP(x_0)v = pr(DP(x_0)v) = pr(\lambda f(p(0)) + Mv) = pr(Mv) = (pr \circ M)(v)$$

b) Kann zeigen:

Für zwei Poincare-Abb'n  $P, \tilde{P} : DP(x_0), D\tilde{P}(\tilde{x}_0)$  sind konjugiert.

□

**12. Randwertprobleme**

momentan nicht



## Teil II.

# Funktionentheorie

Theorie der komplex. dbaren Fu'n

## 1. Holomorphe Abb'n (kplexe Dbarkeit), Kurvenintegrale

Stets:  $U \subset \mathbb{C}$  offen, Def. von „ $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  kplex. dbar bei  $z_0 \in U$ “ bekannt.

### 1.1. Bemerkung

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $f = u + iv = \Re + i\Im$

Also:  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Sei  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$

Äquivalent sind:

a)  $f$  ist bei  $z_0$  kplex. dbar.

b)  $f$  ist bei  $z_0$  reell dbar und  $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  in gewissen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) - -  $J_f(z_0)$  beschreibt eine Drehstreckung

d)  $u$  und  $v$  sind bei  $z_0$  reell dbar. und es gelten die Cauchy-Riemann-DGLen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

(kurz:  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ )

### Beweis

**a)  $\Leftrightarrow$  b)** An. II

**b)  $\Leftrightarrow$  c)** Matrix  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  beschreibt Drehstreckung mit Streckfaktor  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,

Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

**c)  $\Leftrightarrow$  d)**  $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0)$ , falls  $f$  reell dbar. bei  $z_0$

□

### 1.2. Definition

Für  $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  reell dbar. bei  $z_0 \in U$

Sei  $(rot(f))(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0)$

(Entspricht dritten komp. der 3-dim Rotation

$$\tilde{f} : (x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), 0)$$

### 1.3. Folgerung

$$\text{Sei } f := u + iv = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad g := \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v\bar{f}$$

(f mit vertauschten Komponenten),  $z_0 \in U$ , f reell dbar bei  $z_0$   
Äquivalent sind:

- f komplex dbar bei  $z_0$
- $\text{rot}(g)(z_0) = 0$  und  $\text{div}(g)(z_0) = 0$
- $\text{rot}(\bar{f})(z_0) = 0$  und  $\text{div}(\bar{f})(z_0) = 0$

#### Beweis

$$\begin{aligned} \text{rot}(g)(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(z_0), \\ \text{div}(g)(z_0) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0), \\ \text{rot}(\bar{f})(z_0) &= \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)(z_0), \\ \text{div}(\bar{f})(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(z_0) \end{aligned}$$

□

### 1.4. Definition

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt holomorph  $\Leftrightarrow$  f komplex dbar bei jedem  $z_0 \in U$

Notation:  $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holom.}\}$

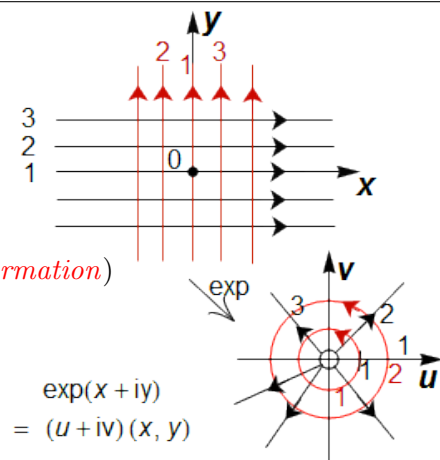
$\mathcal{O}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist bei jedem } z_0 \in U \text{ kplex. dbar}\}$

#### Beispiel zu 1.4

- $f(z) = z^n (n \in \mathbb{N})$
- $f(z) = \exp(z), \cos(z), \sin(z)$
- $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  (*Möbius-Transformation*)
- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  auf  $B(z_0, \rho)$ ,  $\rho > 0$

holomorph=konform

Wirkung der Exp-Fu.:



### 1.5. Definition

komplexe Wegintegrale:  $\int_{\gamma} f(z) dz$

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma[a, b] \rightarrow U$

Sei  $C^1$ -Kurve (oder stickweise  $C^1$ , in Zeichen:  $PC^1$ )

Dann setzt man  $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} f(\gamma(t)) * \dot{\gamma}(t) dt$

\*:komplexe Multiplikation

### 1.6. Bemerkung: Unabhängigkeit der Parametrisierung

Falls  $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  bijektiv und  $C^1$ ,  $\varphi(\tilde{a}) = a$ ,  $\varphi(\tilde{b}) = b$

So ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$

Beweis: Folgt aus Subst. regel

### 1.7. Folgerung

Falls  $f \in \mathcal{O}(U)$  Stammfu. in  $U$  hat ( $F \in \mathcal{O}(U)$ ,  $F' = f$ ), so ist für jede  $PC^1$ -Kurve

$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

insbesondere  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , falls  $\gamma$  geschlossen (d.h. falls  $\gamma(b) = \gamma(a)$ )

**Beweis**

$$\int_a^b \underbrace{f(\gamma(t)) * \dot{\gamma}(t)}_{= \frac{d}{dt} F(\gamma(t))} dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

nach HDI für komplex-wertige Fkt'n

□

### 1.8. Bemerkung: Zushg. zu „rellen“ Kurvenintegralen

Für  $f = u + iv$ ,  $g = v + iu = i\bar{f}$  und  $\gamma$  wie oben gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, d\vec{s} \rangle + i \int_{\gamma} \langle g, d\vec{s} \rangle$$

**Bemerkung:** Für  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $B \subset U$  Kreisscheibe,  $\gamma$  Kurve in  $U$ ,  $Bild(\gamma) \subset B$  und geschlossen ohne Selbstüberschneidung folgt:

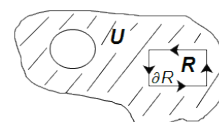
$$\text{Falls } f' \text{ stetig: } \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{int(\gamma)} \underbrace{rot(\bar{f})}_{=0 \text{ (1.3)}} d(x, y) + i \int_{int(\gamma)} \underbrace{rot(g)}_{=0 \text{ (1.3)}} d(x, y) = 0$$

Ziel: Beweis ohne Vorr.  $f'$  stetig.

### 1.9. Satz

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $R \subset U$  Rechteck

Dann ist  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$



gemeint:  $\int_{\gamma} f(z)dz$ ,  $\gamma PC^1$ -Kurve die  $\partial R$  einmal durchläuft

**Beweis**

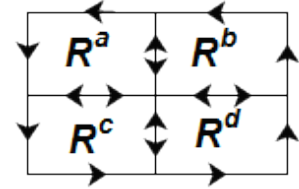
Teile  $R$  in 4 gleiche Teil-Rechtecke  $R^a, R^b, R^c, R^d$ .  
 Sei  $R_1$  dasjenige unter  $R^a, R^b, R^c, R^d$ , für welches  $|\int_{\partial R^*} f(z)dz|$  maximal wird.

Dann wegen  $\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R^a} f(z)dz + \dots + \int_{\partial R^d} f(z)dz$ :

$$\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R_1} f(z)dz \right|$$

Teile  $R_1$  entspr. in 4 Teilrechtecke  $R_1^a, R_1^b, R_1^c, R_1^d$  ein.

Sei  $R_2$  dasjenige, wo  $|\int_{\partial R_1^*} f(z)dz|$  maximal wird.



Dann  $\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial R_2} f(z)dz \right|$ ,

rekursiv:  $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$

$$\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| \leq 4^j \left| \int_{\partial R_j} f(z)dz \right|$$

Umfang von  $R_j$ :  $|\partial R_j| = \frac{|\partial R|}{2^j}$ , Durchmesser  $R_j$ :  $diam(R_j) = 2^{-j} diam(R)$

offenbar:  $\exists z^* \in U : \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j = \{z^*\}$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  dbar bei  $z^*$  ex.  $\delta > 0$  mit

$$\forall z \in \underbrace{B(z^*, \delta)}_{\text{bzgl. } \|\cdot\|_{\infty}} : |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \varepsilon |z - z^*|$$

Es ex  $j \in \mathbb{N}$  mit  $R_j \subset B(z^*, \delta)$ . Somit  $|\int_{\partial R} f(z)dz| \leq 4^j |\int_{\partial R_j} f(z)dz|$

$$\leq 4^j \left\{ \int_{\partial R_j} \underbrace{|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)|}_{\leq \varepsilon |z - z^*| \leq \varepsilon diam(R_j)} |dz| + \underbrace{\int_{\partial R_j} f(z^*) + f'(z^*)(z - z^*) dz}_{*=0} \right\} \leq$$

$$4^j \varepsilon \int_{\partial R_j} diam(R_j) dz = \varepsilon 4^j |\partial R_j| \cdot diam(R_j) = \varepsilon 4^j \frac{|\partial R| diam(R_j)}{2^j 2^j} = \varepsilon |\partial R| diam(R)$$

\* Polynom von Grad 1 in  $Z$  hat Stammfu.

Dies für jedes  $\varepsilon > 0$ , also  $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$

□

Bemerkung:  $\int_{\gamma} |g(z)||dz| = \int_a^b |g(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)| dt$

**1.10. Folgerung**

Zu  $f \in \mathcal{O}(U), z_0 \in U, \delta > 0$  mit  $B_{\|\cdot\|_{\infty}}(z_0, \delta) \subset U$  ex.

Stammfu.  $F \in \mathcal{O}(B(z_0, \delta))$  zu  $f|_{B_{\|\cdot\|_{\infty}}(z_0, \delta)}$

**Beweis**

Sei  $\delta$  wie angeg.

Setze  $F(z) := \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\omega)d\omega$ , wobei  $\gamma_{z_0,z}$ : Für  $z = x + iy \in B(z_0, \delta), \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

mit  $z + \xi \in B(z_0, \delta)$  ist:

$F(z + \xi) - F(z) \stackrel{*}{=} \int_{[z, z+\xi]} f(\omega)d\omega$ ; damit  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{F(z+\xi) - F(z)}{\xi} = f(z)$

Gezeigt: Ex. (\*)  $F_x(z), F_x(z) = f(z)$

\*:  $\int f(x)dx = 0$  (vgl 1.9)

Weiter: Für  $\eta \neq 0, |\eta|$  genügend klein:

$\frac{1}{\eta}[F(z + i\eta) - F(z)] = \frac{1}{\eta} \int_{[z, z+i\eta]} f(w)dw$

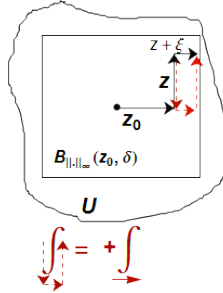
mit  $\gamma(r) := z + ir, r \in [0, \eta]$  ist das

$\dots = i \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f(z + ir)dt \xrightarrow{\eta \rightarrow 0}$

Also: ex.  $\frac{\partial F}{\partial y}(z), = if(z)$  (\*\*)

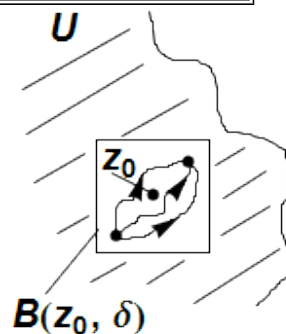
Also: F ste. partiell dbar., also F total (reell. dbar.)

Wegen (\*) und (\*\*): F auch komplex dbar;  $F' = f$



**1.11. Folgerung: Wegintegral lokalwegunabhängig**

Für  $f \in \mathcal{O}(U), z_0 \in U, \delta > 0$  mit  $B(z_0, \delta) \subset U$  wie oben ist  $\int_\gamma f(z)dz$  nur abhängig vom Anfangs- und Endpunkt  $\gamma$  von  $\gamma$ , solange  $Bild(\gamma) \subset B(z_0, \delta)$



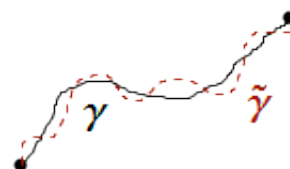
**Beweis**

Für solche  $\gamma$  ist mit F wie oben  $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ , falls  $\gamma : [a, b] \rightarrow B(z_0, \delta)$

**1.12. Lemma**

Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  sei  $PC^1$ . Dann:  
 $\exists \delta > 0 \forall \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U PC^1, \tilde{\gamma}(0) = \gamma(0), \tilde{\gamma}(1) = \gamma(1), \|\tilde{\gamma} - \gamma\|_\infty < \delta :$

$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$



**Beweis**

Es ex.  $\delta_0 > 0$  mit  $Bild(\gamma) + B_{\|\cdot\|_\infty}(0, \delta_0) \subset U$   
 $Bild(\gamma)$ : kp,  $\partial U$  abgeschlossen.

Sei  $\tilde{\gamma}$  wie oben mit  $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_\infty < \frac{\delta_0}{2}$

Sei  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  Einteilung von  $[0, 1]$  mit

$\forall i \in 1, \dots, n : |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \frac{\delta_0}{2}$ , falls  $t \in [t_{i-1}, t_i]$

...  $|\tilde{\gamma}(t_i) - \tilde{\gamma}(t_{i-1})| < \frac{\delta_0}{2}, \dots$

(glm. Ste'keit von  $\gamma$  bzw.  $\tilde{\gamma}$ )

Def. für  $i \in \{0, \dots, n\}$  Kurven  $K_i$  durch

$$K_i := \gamma|_{[t_i, t_n]} \circ \underbrace{[\tilde{\gamma}(t_i), \gamma(t_i)]}_{\text{Strecke von } \tilde{\gamma}(t_i) \text{ bis } \gamma(t_i)} \circ \tilde{\gamma}|_{[t_0, t_i]}$$

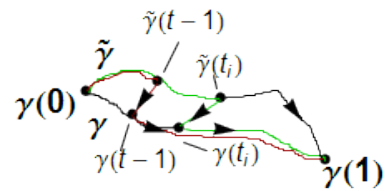
o: *Hintereinanderdurchlaufung*, nicht -ausführung! Dann  $\int_{K_0} f(z) dz =$

$$\int_{\gamma} f(z) dz, \int_{K_n} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Nach Konstr. ist  $[\tilde{\gamma}(t_{i-1}, \gamma(t_{i-1})) \cup [\tilde{\gamma}(t_i), \gamma(t_i)] \cup \tilde{\gamma}([t_{i-1}, t_i]) \cup \gamma(t_{i-1}) \subset \gamma(t_{i-1}) + B(0, \delta_0)$

Mit 1.11 folgt:  $\int_{K_i} f(z) dz = \int_{K_{i-1}} f(z) dz, i=1, \dots, n$

□



**1.13. Satz: Homotopieinvarianz von Wegintegralen**

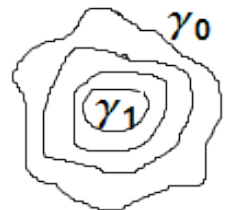
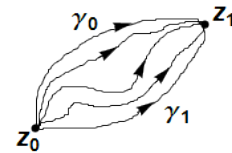
Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und für  $s \in [0, 1]$  sei  $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow U$   $PC^1$ -Kurve.  
 Die Abb.  $H : [0, 1] \times [0, 1] \ni (s, t) \mapsto \gamma_s(t)$  sei stetig.

(*Homotopie* von  $\gamma_0$  auf  $\gamma_1$  in  $U$ )

Es gelte:

- a)  $\forall s \in [0, 1] : \gamma_s(0) = z_0, \gamma_s(1) = z_1$ , unabh. von  $s$ . oder
- b)  $\forall s \in [0, 1] : \gamma_s$  geschlossen ( $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ )

Dann ist  $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$

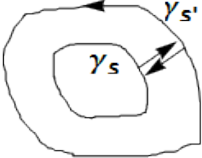


**Beweis**

$$I(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz, \quad \delta := \text{dist}(\underbrace{\text{Bild}(H)}_{\text{kp.}}, \partial U) > 0$$

Es ex., da H glm. stetig,  $\delta_1 > 0$  mit:  
 $|s - s'| < \delta_1, |t - t'| < \delta_1 \Rightarrow |H(s, t) - H(s', t')| < \delta$   
 Insbes.  $|s - s'| < \delta_1 \Rightarrow \|\gamma_s - \gamma_{s'}\|_\infty < \delta$   
 Seien  $s, s' \in [0, 1], |s - s'| < \delta_1$   
 Im Fall a): Nach 1.12 (Beweis zeigt: „ $\delta$ “ hier ist zulässig als „ $\delta_0$ “ in 1.12)  
 $I(s) = I(s')$   
 Im Fall b): Sei  $\kappa := \underbrace{[\gamma_{s'}(0), \gamma_s(0)]}_{\text{auf } [1,2]} \circ \underbrace{\gamma_{s'}}_{\text{auf } [0,1]} \circ \underbrace{[\gamma_s(0), \gamma_{s'}(0)]}_{\text{auf } [-1,0]}$   
 Sei  $\tilde{\gamma}_s := \underbrace{[\gamma_s(0), \gamma_s(0)]}_{\text{auf } [1,2]} \circ \underbrace{\gamma_s}_{\text{auf } [0,1]} \circ \underbrace{[\gamma_s(0), \gamma_s(0)]}_{\text{auf } [-1,0]}$   
 Dann  $\text{Bild}(\kappa) \subset U$  und  $\|\tilde{\gamma}_s - \kappa\|_\infty < \delta$   
 Nach 1.12 und wegen Unabh. von Parametrisierung:  

$$\int_{\gamma_s} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_s} f(z) dz = \int_{\kappa} f(z) dz = \int_{\gamma_{s'}} f(z) dz,$$
  
 Also:  $I(s) = I(s)'$   
 Folgt: I:konstant auf  $[0, 1]$ , speziell  $I(0) = I(1)$

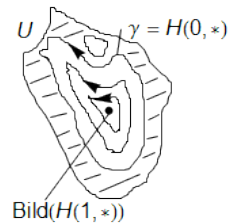


## 2. Cauchyscher Integralsatz und Folgerungen aus der Homotopieinvarianz

### 2.1. Cauchyscher Integralsatz

Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $\gamma$  geschlossene  $PC^1$ -Kurve in  $U$ , die in  $U$  *nullhomotop* („zusammenziehbar“) ist, d.h. es ex. Homotopie  $H$  wie in 1.13 von  $\gamma$  auf konstante Kurve, innerhalb der Klasse geschlossener Kurven, mit Werten in  $U$ .

Dann ist  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$



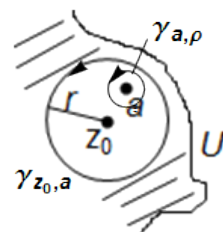
**Beweis**

Sei  $\kappa$  die konstante Kurve, zu der  $\gamma$  in  $U$  homotop ist (in der Klasse geschl. Kurven).  
 Dann  $\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{1.13.b}{=} \int_{\kappa} f(z) dz = 0$

### 2.2. Cauchysche Integralformel

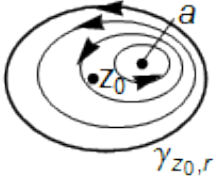
Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $z_0 \in U, B_{\|\cdot\|_2}(z_0, r) \subset U, a \in B(z_0, r)$

Dann ist  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$



**Beweis**

Für  $\rho > 0$  genügend klein ist  $\int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz$  unabh. von  $\rho$

$$\int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{it})}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 2\pi i f(a)$$


Also: Für  $\rho > 0$  genügend klein:  $f(a) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz$

Da  $\gamma_{a,\rho}$  homotop zu  $\gamma_{z_0,r}$  in  $U \setminus \{a\}$  (innerhalb Klasse geschl. Kurven)

ist  $\int_{\gamma_{a,\rho}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{z-a} dz$

□

**2.3. lokale Potenzreihenentw.**

Für  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,  $z_0 \in U$  und  $B(z_0, r) \subset U$  gilt:

$\forall z \in B(z_0, r) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , wobei der Konv.radius dieser Potenzreihe mindestens  $r$  ist und

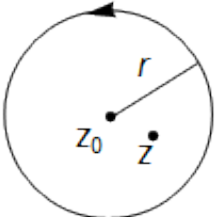
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (\text{Cauchysche Formel für die Taylorkoeffizienten})$$

**Beweis**

Nach 2.2 ist für  $z \in B(z_0, r) : 2\pi i f(z) = \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})} d\zeta =$

$$\oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta$$

(glm. Konvergenz erlaubt Vertauschung!)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n$$


□

**2.4. Folgerung: Satz von Goursat**

$f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f$  bel. oft kplex.dbar. lokal durch Potenzreihe geg. (komplex analytisch)

**2.5. Folgerung: Cauchysche Abschätzung für Taylorkoeffizienten**

Mit  $c_n$  wie oben und  $M := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$  gilt:

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

**Beweis**

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{(r e^{it})^{n+1}} r i e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} dt = \frac{M}{r^n}$$

□



## 2.6. Satz von Liouville

$f \in \mathcal{O}(U) \subset \mathbb{C}$  beschränkt  $\Rightarrow f$  konstant  
(„jede beschr. ganze Fu. ist konstant“)

### Beweis

Mit  $z_0 := 0$  und  $M > 0$  mit  $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq M$  gilt nach 2.3,2.5:

$\forall r > 0 : \overline{B(0, r)}$  enthalten im Holomorphiegebiet von  $f$ , also:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } |c_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

Für  $r \rightarrow \infty$  folgt:  $c_n = 0$ , falls  $n \geq 1$

Also:  $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = c_0$

□

## 2.7. Fundamentalsatz der Algebra

Eine durch  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  def. Polynomfu. mit  $n \geq 1, a_n \neq 0$  hat stets eine komplexe Nullstelle

Folgt:  $p$  hat Zerl. in Linearfaktoren  $p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

### Beweis

Falls nicht, so ist  $z \mapsto \frac{1}{p(z)}$  hol. auf ganz  $\mathbb{C}$

die wegen  $|p(z)| \rightarrow \infty (z \mapsto \infty)$  auch beschränkt ist, nach Liouville also konstant.

Somit auch  $p$  konstant, Wid. zu  $n \geq 1, a_n \neq 0$ .

□

## 2.8. Satz von Morera: Teilweise Umkehrung des Cauchy-Integralsatzes

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und für jedes Dreieck  $D \subset U$  sei  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , wobei  $\gamma$   $PC^1$

Kurve ist, die  $\partial D$  einmal umläuft.

Dann  $f \in \mathcal{O}(U)$ .



**Beweis**

Sei  $p \in U, r > 0$  ist  $B(p, r) \subset U$

Def.  $F: B(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) := \int_{[p, z]} f(\zeta) d\zeta$$

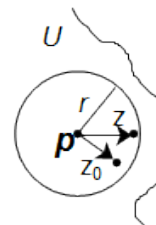
Für  $z, z_0 \in B(p, r)$ :

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[p, z]} \dots - \int_{[p, z_0]} \dots = \int_{[p, z]} \dots + \int_{[z_0, p]} \dots + \int_{[z, z_0]} \dots - \int_{[z, z_0]} \dots = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$$

$$\text{Also: } \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0)$$

Damit  $F \in \mathcal{O}(U), F' = f$

Nach Gourat 2.4: Auch  $f \in \mathcal{O}(U)$



□

**3. Nullstellen hol. Fu'n****3.1. Definition/Bemerkung**

Sei  $f \in \mathcal{O}(U), k \in \mathbb{N}_0, z_0 \in U$  heißt ***k-fache Ns.*** von  $f$ , falls  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(k)}(z_0)$

Äquivalent ist:

$$\exists g \in \mathcal{O}(U), g(z) \neq 0, f(z) = (z - z_0)^k g(z) \quad (z \in U)$$

**3.2. Satz: Verhalten an Nullstellen**

Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $z_0 \in U$   $k$ -fache Ns von  $f$  ( $k \geq 1$ )

Dann ex. Umg  $U_0$  von  $z_0, U_0 \subset U, h \in \mathcal{O}(U_0)$  mit einfacher Ns bei  $z_0$ , sodass  $\forall z \in U_0 : f(z) = (h(z))^k$

**Beweis**

O.E.  $z_0 = 0$ .

Dann in einer Umg  $U_1$  von  $0$   $f(z) = z^k g(z), g(0) \neq 0, g \in \mathcal{O}(U_1)$

Es ex. ein  $w \in \mathbb{C}$  mit  $g(0) = w^k$  und Umg.'n  $V$  von  $w$  und  $\tilde{V}g(0)$ , so dass die Abb.  $V \times V \rightarrow \tilde{V} \quad (w \mapsto g(0))$  ***biholomoprh*** ist (holomorph, bijektiv, Umkehrabb. auch holomorph)

Wähle Umg  $U_0 \subset U_1$  mit  $g(U_0) \subset \tilde{V}$ . Dann  $\forall z \in U_0 : f(z) = z^k g(z) = \underbrace{(z \sqrt[k]{g(z)}}_{=: h(z)}^k$

$$h(0) = 0, h \in \mathcal{O}(U_0), h'(0) = \sqrt[k]{g(0)} = w \neq 0$$

□

**3.3. Satz: Blätterzahl bei einer Ns**

Se  $f \in \mathcal{O}(U), z_0$   $k$ -fache Ns. von  $f$  ( $k \geq 1$ ). Dann ex. für alle genüg. kleinen  $\varepsilon > 0$ :

eine off. Umg.  $U_\varepsilon$  von  $z_0$  mit:  $f(U_\varepsilon) = B(z_0, \varepsilon)$  und

$f|_{U_\varepsilon}$  nimmt jeden Wert  $w \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$  genau  $k$ -mal an.

**Beweis**

O.E.  $z_0 = 0$

1) Aussage stimmt, falls  
 $f(z) = z^k (z^k = w = rei\varphi)$  hat k Lösungen  
 $r^{\frac{1}{k}} e^{\frac{i\varphi}{k}} e^{\frac{2\pi ij}{k}}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k - 1$

2) Für allg.  $f : f(z) = (h(z))^k$  in einer Umg.  $U_0$  von 0 wie in 3.2,  
 $h(0) = 0, h'(0) \neq 0$   
 Nach Teil 1 wird für  $\varepsilon > 0$   $B(0, \varepsilon^{\frac{1}{k}})$  k-fach von  $z \mapsto z^k$  auf  $B(0, \varepsilon)$  abgebildet.  
 Es ex.  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], B(0, \varepsilon^{\frac{1}{k}}) \subset h(\tilde{U}_0)$   
 Für diese  $\varepsilon$  setze  $U_\varepsilon := h^{-1}(B(0, \varepsilon^{\frac{1}{k}}))$

Kommutat. Diagr.:

□

### 4. Hol. Fu'n auf Gebieten

#### 4.1. Definition

$G \subset \mathbb{C}$  heißt **Gebiet**  $\Leftrightarrow G$  ist offen und zusammenhängend  
 Äquiv. ist:  $G$  ist offen und wegzusammenhängend

#### 4.2. Identitätssatz

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet,  $f, g, \in \mathcal{O}(G)$  und die Menge  $\{z \in G | f(z) = g(z)\}$   
 habe einen Hp.  $z_0 \in G$ . Dann  $f = g$

**Beweis**

Sei  $h := f - g$ . Die Ns. von  $h$  häufen sich bei  $z_0$ , also nach Satz 3.2:  $h$  hat bei  $z_0$  nicht Ns von endliche Ord.  $k$ , also  $h^{(k)}(z_0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Damit alle Taylor-koeff. von  $k$  bei  $t_0 = 0$

Sei  $\tilde{G} := \{z \in G | \forall k \in \mathbb{N}_0 : h^{(k)}(z) = 0\}$  (also  $z_0 \in \tilde{G}$ )

$\tilde{G} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\left(h^{(k)}\right)^{-1}(\{0\})}_{abg.}$  also  $\tilde{G}$  abg. (relativ)

Sei  $z \in \tilde{G}$ . Dann ex.  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subset G$  und  $(w - z)^k$  für  $w \in B(z, r)$ , also  $h=0$  auf  $B(z, r)$ , also  $B(z, r) \subset \tilde{G}$

Somit  $\tilde{G}$  offen

$\tilde{G} \subset G$  offen, abg. nichtleer und  $G$  zusammenhängend  $\Rightarrow \tilde{G} = G$

Also  $h=0$  auf  $G$ ,  $f=g$  auf  $G$

□

### 4.3. Satz: Gebietstreue

$G$  Gebiet,  $f \in \mathcal{O}(G)$  nicht konstant  $\Rightarrow f(G)$  auch Gebiet

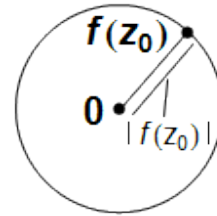
#### Beweis

- 1)  $f(G)$  zusammenhängend klar (stetiges Bild der zushg. Menge  $G$ )
- 2)  $f(G)$  offen: Sei  $w \in f(G)$ ,  $z_0 \in G$ ,  $f(z_0) = w$   
 $z \mapsto f(z) - w$  hat bei  $z_0$  Ns einer Ordnung  $k \in \mathbb{N}$  (sonst  $f$  lokal konstant= $w$ , nach 4.2  $f$  konstant)  
 Nach Satz 3.3  $\exists \varepsilon > 0 : B(w, \varepsilon) \subset \text{Bild}(f) = f(G)$ . Also  $f(G)$  ist offen

□

### 4.4. Maximumsprinzip

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet  
 $f \in \mathcal{O}(G)$  nicht konstant  $\Rightarrow |f|$  hat kein Max. in  $G$



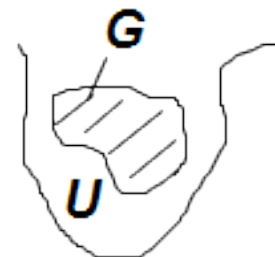
#### Beweis

Wäre  $|f(z_0)|$  maximal, so  $\forall z \in G : f(z) \in \overline{B(0, |f(z_0)|)}$   
 Wid. zu  $f(G)$  offen und  $f(z_0) \in f(G)$

□

### 4.5. Folgerung

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet,  $\overline{G} \subset U$ ,  $f \in \mathcal{O}(U)$  nicht konstant und  $\overline{G}$  kp.  
 Dann nimmt  $|f|_{\overline{G}}$  sei Max. auf  $\partial G$  an (nicht in  $G$ !)



### 4.6. Schwarzsches Lemma

Sei  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$   
 Sei  $f: \mathbb{E} \leftrightarrow \text{hol.}$ ,  $f(0) = 0$

- a) Dann  $\forall z \in \mathbb{E} : |f(z)| < |z|$  und  $|f'(0)| \leq 1$
- b) Falls ein  $z \in \mathbb{E}$  ex. mit  $|f(z)| = |z|$  oder falls  $|f'(0)| = 1$ , so ist  $f$  eine Drehung:  
 $\exists \varphi \in [0, 2\pi) : f(z) = e^{i\varphi} z$  ( $z \in \mathbb{E}$ )

**Beweis**

Nach Potenzreihenentwicklungssatz:

$f(z) = z \cdot g(z)$  mit einem  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$

Es ist  $f'(0) = g(0)$

Falls  $z \in \mathbb{E}$ ,  $|z| = r \in (0, 1)$ , so  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$

Nach Maximumprinzip:  $\forall z \in \overline{B(0, r)} : |g(z)| \leq \frac{1}{r}$

Durch Grenzübergang  $r \rightarrow 1 : \forall z \in \mathbb{E} : |g(z)| \leq 1$ , also  $|f(z)| \leq 1 \cdot |z|$  und  $|f'(0)| \leq 1$

zu b): Falls  $|f(z)| = |z|$  für ein  $|z| \neq 0$  oder  $|f'(0)| = 1$  für, so  $|g(z)| = 1$  für ein  $z \in \mathbb{E}$

Dann da  $|g| \leq 1$  auf  $\mathbb{E}$ : Nach Mac.Prinzip  $g$  konstant,

$g(z) = e^{i\varphi}$  für ein  $\varphi \in (0, 2\pi)$  und alle  $z \in \mathbb{E}$

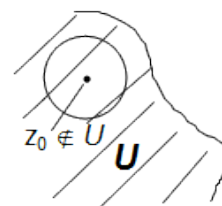
Dann  $f(z) = ze^{i\varphi}$  (Drehgl.)



□

**5. Isolierte Singularitäten**

Sei stets  $U \subset \mathbb{C}$  offen

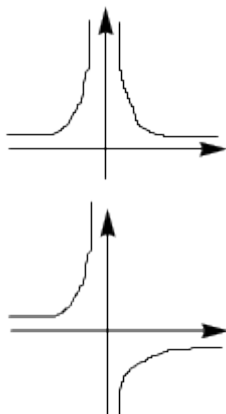
**5.1. Definition**

Sei  $f \in \mathcal{O}(U)$  und  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ , aber so, dass gilt:  $\exists r > 0 : B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset U$   
Dann heißt  $z_0$  isolierte *Sgt.* von  $f$

**5.2. Definition**

Eine isol. Sgt.  $z_0$  von  $f$  heißt:

- hebbare Sgt.*, falls sich  $f$  durch geeig. Wahl von  $f(z_0)$  zu holom. Fu. fortsetzen lässt.
- Pol* von  $f \Leftrightarrow$  nicht hebbare Sgt., aber  $\exists m \in \mathbb{N} : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  hat hebbare Sgt. bei  $z_0$ .  
Das minimale solche  $m$  heißt *Ordnung des Poles*
- wesentliche Sgt.* von  $f \Leftrightarrow$  nicht hebbar, nicht Pol

**Beispiel zu 5.1**

a)  $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$  bei  $z_0 = 0$

b)  $f(z) = \frac{1}{z^m}$  bei  $z_0 = 0 (m \in \mathbb{N})$  (Pol der Ordnung  $m$ )

(Symbolische Bilder, typisches Verhalten im reellen Fall)

### 5.3. Definition

$f$  *meromorph* auf  $U$  (in Zeichen  $f \in \mathcal{M}(U)$ )  $\Leftrightarrow f$  holomorph bis auf Pole in  $U$   
(d.h.  $\exists P \subset U, U \setminus P$  offen,  $f|_{U \setminus P} \in \mathcal{O}(U \setminus P), \forall z_0 \in P : z_0$  Pol von  $f$ )

### 5.4. Bemerkung

$g, h \in \mathcal{O}(G)$ ,  $G$  Gebiet  
 $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}, \forall z \in G$  mit  $h(z) \neq 0$   
 ein  $f \in \mathcal{M}(G)$  definiert

#### Beweis

Sei  $z_0 \in G$

1. Falls  $h(z_0) \neq 0$ , so auch in einer Umg. von  $z_0$ ,  $h(z) \neq 0$ . Auf dieser Umg.  $f$  hol.

2. Falls  $h(z_0) = 0$ , so nach Identitätssatz (da nicht  $h=0$  auf  $G$ ):  $z_0$  Ns endlicher Vielfachheit von  $h$

und es ex.  $k \in \mathbb{N}, \tilde{h} \in \mathcal{O}(G) : h(z) = (z - z_0)^k \tilde{h}(z), \tilde{h}(z_0) \neq 0$

2a) Falls  $g=0$  auf  $G$ , so Beh. klar ( $f=0$  auf  $G$ , bzw. Forts. von  $f$  auch bei den NS von  $h$ )

2b) Sonst ex.  $l \in \mathbb{N}_0 : g(z) = (z - z_0)^l \tilde{g}(z) \quad (z \in G)$

Dann in einer Umg. von  $z_0$  in der  $h$  keine weitere Ns. hat:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = (z - z_0)^{l-k} \underbrace{\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}}_{\neq 0 \text{ bei } z=z_0}$$

Somit  $f$  bei  $z_0$  hol. fortsetzbar falls  $l \geq k$  bzw.  $f$  hat Pol der Ordnung  $k-l$ , falls  $k > l$

Folgt  $f \in \mathcal{M}(G)$

□

### 5.5. Bemerkung

Sei  $f \in \mathcal{M}(G)$ ,  $P_f := \{z \in G | z \text{ Pol von } f\}$

$N_f := \{z \in G | z \text{ Ns. on } f\}$

Fals nicht  $f = 0$  auf  $G$ , so haben  $N_f$  und  $P_f$  keinen Hp in  $G$ .

**Beweis**

1.  $P_f$  hat keinen Hp in  $G$ : Für  $z_0 \in G$  ist

a)  $f$  hol. in Umg von  $z_0$  oder (dann  $z_0$  kein Hp von  $P_f$ )

b)  $z_0$  Pol von  $f$  (dann isol. Sgt.) also kein Hp von  $P_f$

2.  $N_f$  hat keinen Hp. in  $P_f$ :

Falls  $z_0 \in P_f, |f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$

3.  $\tilde{G} := G \setminus P_f$  Gebiet

$\tilde{G}$  ist offen: falls  $x \in \tilde{G}$ , so ex.  $\delta > 0$  mit  $B(x, \delta) \subset \tilde{G}$ , sonst wäre  $x$  Hp. von  $P_f$  in  $G$

Zeige noch:  $\tilde{G}$  ist wegzusammenhängend.

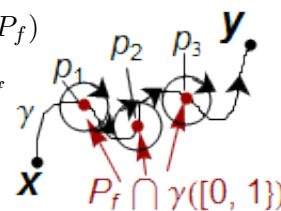
Seien  $x, y \in \tilde{G}$ . Es ex.  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

$P_f$  besteht aus isol. Punkten,  $\gamma([0, 1])$  kp.  $\Rightarrow P_f \cap \gamma([0, 1])$  ist endlich (kp. Menge aus isolierten Pkten.)

Es ex.  $r_j > 0$  mit:  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : \overline{B(p_j, r)} \cap P_f = \{p_j\}$

Ändere  $\gamma$  ab zu  $\tilde{\gamma}$  wie in der Zeichnung

$\tilde{\gamma}$  ist Weg von  $x$  nach  $y$  in  $G \setminus P_f = \tilde{G}$



□

**5.6. Definition/Bemerkung**

Für  $f, g \in \mathcal{M}(G)$ , wobei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet def. man  $f \pm g$  zunächst auf  $G \setminus (P_f \cup P_g)$  und dann durch Hebung aller hebbaren Sgtäten.

(im Fall „/“:  $G \setminus (P_f \cup P_g \cup N_g)$ )

Dann wird  $\mathcal{M}(G)$  zum *Körper der meromorphen Fu'n* auf  $G$

**Beweis**

$f \in \mathcal{M}(G)$ , nicht Nullfu.  $\Rightarrow g : G \setminus (N_f \cup P_f) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z)}$  hat nur isol. Sgt. in  $G$ , Pole in den Pkten  $z_0 \in N_f$  hebbare Sgt'en (Forts. durch 0, stetig, aber auch hol.? später...) in Punkten  $z_0 \in P_f$ .

Also nach Hebg. der hebbaren Sgt'en:

$g \in U(G), g \circ f = 1$  auf  $G \setminus N_f \cup P_f$ , also nach Hebg. der Sgt'en  $g \circ f = 1$  auf  $G$

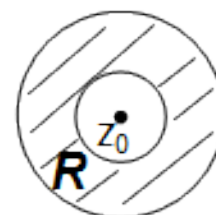
Somit  $g$  multipl. invers zu  $f$ .

□

**5.7. Definition/Bemerkung: Laurentreihe**

Eine „Potenzreihe“ der Form  $\underbrace{\sum_{n < 0} c_n(z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} (*)$

heißt *Laurentreihe* zum Entwicklungspkt.  $z_0$



Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^n$  den Konvergenzradius  $\rho_-$  hat  
 und  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  den Konvrad.  $\rho_+$  hat  
 und  $\frac{1}{\rho_-} < \rho_+$   
 So ist die Laurentreihe (\*) für  $z$  mit  $|z - z_0| \in (\frac{1}{\rho_-}, \rho_+)$  konvergent,  
 also in dem **Kreisring**  $R := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{\rho_-} < |z - z_0| < \rho_+\}$   
 Die Konv. ist auf kp. Teilmengen von  $R$  gleichmäßig.

**Beweis**

Folgt aus entspr. Auss'n für Potenzreien. □

Bemerkung: Entsprechend zu lesen, falls  $\rho_- = \infty$  oder  $\rho_+ = \infty$

**5.8. Folgerung**

Die Summenfunktion  $f$  einer im Kreisring  $R$  konvergenten Laurentreihe ist holomorph.

Es gilt:  $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_n n (z - z_0)^{n-1}}_{0 \text{ für } n=0}$

**Beweis**

- Auf kp. Teilmengen von  $R$ :  
 Glm. konv. Folge hol Fu'n hat hol. Grenzf. (Folgt aus Satz v. Morrrera)  
 Dann  $f$  hol.

$$2. f(z) = \underbrace{\sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^n}_{=: g(z)} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} \dots}_{=: h(z)}$$

$$h, g \in \mathcal{O}(R), h'(z) = \sum_{n \geq 0} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

□

**5.9. Definition/Bemerkung**

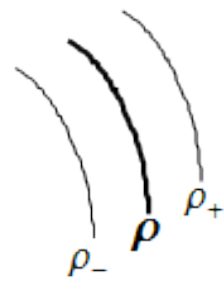
Mit  $\tilde{g}(u) := \sum_{n < 0} c_n u^{|n|}$  ist  $g(z) = \tilde{g}(\frac{1}{z - z_0})$

$$\begin{aligned} \text{Also } g'(z) &= \tilde{g}'(\frac{1}{z - z_0}) \cdot (-\frac{1}{(z - z_0)^2}) = \left( \sum_{n < 0} c_n (\frac{1}{z - z_0})^{|n|-1} \cdot |n| \right) \cdot (-\frac{1}{(z - z_0)^2}) \\ &= \sum_{n < 0} c_n (z - z_0)^{1 - |n| - 2} n = \sum_{n < 0} n c_n (z - z_0)^{n-1} \end{aligned}$$



5.10. Satz

Falls die Laurentreihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$  in  $R$  wie oben gegen  $f$  konv., so gilt:  
 $\forall \rho \in (\rho_-, \rho_+) \forall n \in \mathbb{Z} : c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$



**Beweis**

Konv. auf  $\{z \mid |z - z_0| = \rho\}$  erlaubt Vertauschung von  $\sum$  mit  $\oint$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{|z-z_0|^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{c_j(z-z_0)^j}{|z-z_0|^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{c_j(z-z_0)^j}{|z-z_0|^{n+1}} dz$$

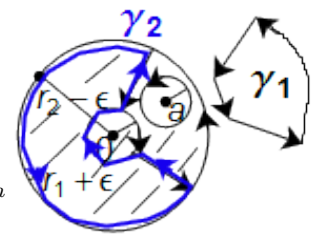
(alle 0 außer für  $j=n$  (für  $j \neq 0$ ): Ex. Stammfu.)

$$\Rightarrow \dots = \frac{1}{2\pi i} c_n \underbrace{\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{z-z_0} dz}_{2\pi i} = c_n$$

Früher Jetzt □

5.11. Satz: Laurent-Entwicklung

Sei  $f \in O(U)$ ,  $R := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\} \subset U$   
 Dann hat  $f$  in  $R$  eine **Laurent-Entw.**  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$



$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \rho \in (r_1, r_2) \text{ beliebig.}$$

**Beweis**

O.E.  $z_0 = 0$

Für  $a \in R$  nach Cauchy-Integralformel für  $\epsilon > 0$  genügend klein:

$$2\pi i f(a) = \oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a} dz =$$

$$\underbrace{\oint_{|z|=r_2-\epsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=:T_1} - \underbrace{\oint_{|z|=r_1+\epsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=:T_2}$$

$$T_1 = \int \frac{f(z)}{z(1-\frac{a}{z})} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint \frac{f(z)}{z} (\frac{a}{z})^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \oint_{|z|=r_2-\epsilon=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

$$T_2 = - \oint_{|z|=r_1+\epsilon} \frac{1}{a} \frac{f(z)}{\frac{z}{a}-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \oint_{|z|=r-\epsilon} f(z) (\frac{z}{a})^n dz = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \oint_{|z|=r_1-\epsilon} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz$$

(oder  $|z| = \rho \in (r_1, r_2)$ )

Also:  $f(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right) \cdot a^n$  □

5.12. Folgerung

Falls  $\rho \in (r_1, r_2)$  und  $|f| \leq M$  auf  $\{z \mid |z - z_0| = \rho\}$ , so gilt

$$\forall u \in \mathbb{Z} : |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Beweis: wie Taylorkoeff.

### 5.13. Beschr. des Sgätentyps durch Laurent-Entw.

Sei  $z_0$  isol. Sgt. von  $f$  und  $\sum_{z \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$  die Laurent-Entwicklung von  $f$  im „Kreisring“  $\{r | 0 < |z - z_0| < R\}$

(Laurent-Entwicklung bei  $z_0$ )

- a)  $z_0$  hebb. Sgt.  $\Leftrightarrow$  Alle  $c_n$  mit  $n < 0$  sind 0 (Hauptteil=0)
- b)  $z_0$  ist Pol der Ordnung  $k$   $\Leftrightarrow c_{-k} \neq 0, c_n = 0$  für alle  $n < -k$
- c)  $z_0$  wesentliche Sgt.  $\Leftrightarrow c_{-n} \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

Beweis: a),b) leicht, c) durch Komplementbildung

#### Beispiel zu 5.12

$$\frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{5!} - \dots}_{\text{Nebenteil}}$$

$\Rightarrow$  Pol der Ordnung 3

### 5.14. Riemannscher Hebbarkeitssatz

$f$  beschränkt in einer Umg. der isol. Sgt.  $z_0 \Rightarrow z_0$  hebbbar

#### Beweis

Für  $n < 0$ :  $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{|n|} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$

für alle  $\rho > 0$  genügend klein, wobei  $M$  Schranke für  $|f|$

Also Hauptteil = 0

(Schließt Beweislücke in 5.6, falls  $f$  st. fortsetzbar bei  $z_0$ , so nach 5.13 Forts. auch hol.)

□

## 6. $\oint \frac{dz}{z}$ und Umlaufzahlen

### 6.1. Bemerkung

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} PC^1$  und  $r(t) := |\gamma(t)| (t \in [0, 1])$

$\varphi_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\gamma(0) = r(0)e^{i\varphi_0}$  ( $\varphi_0$  nur mod  $2\pi$  bestimmt)

Dann:

a)  $\dot{r}(t) = \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{r(t)} = \Re \left( \frac{\overline{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)}{r(t)} \right)$  für die  $t$ , wo  $\gamma$  dbar.

b) Es ex. eind. st. Fu.  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(0) = \varphi_0$  mit  $\forall t \in [0, 1] : \gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$

c)  $\dot{\varphi} = \frac{(\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1)(t)}{r^2(t)} = \Im \left( \frac{\gamma(t) \dot{\gamma}(t)}{r^2(t)} \right)$

$r = \frac{\langle \vec{r}_1, \vec{v} \rangle}{r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$

**Beweis**

$$\text{a) } r(\lambda) = \sqrt{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)}, \quad \dot{r} = \frac{2\gamma_1\dot{\gamma}_2 + 2\gamma_2\dot{\gamma}_1}{2r} = \Re\left(\frac{(\gamma_1 - i\gamma_2)(\dot{\gamma}_1 + i\dot{\gamma}_2)}{r}\right)$$

$$\text{b) Def: } \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \Im\left(\frac{\bar{\gamma}(s)\dot{\gamma}(s)}{r^2(s)}\right) ds, \quad \varphi \text{ ste, } \varphi(0) = \varphi_0, \text{ Formel c) gilt}$$

$$\text{Setze } \delta(t) := r(t)e^{i\varphi(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta(t)}{\gamma(t)}\right] = \dot{\delta}(t)\gamma(t) - \delta(t)\dot{\gamma}(t)/\gamma(t)^2,$$

$$\text{Zähler} = (\dot{r}e^{i\varphi} + re^{i\varphi}i\dot{\varphi})\gamma - re^{i\varphi}\dot{\gamma}$$

$$= e^{i\varphi}\left\{\Re\left(\frac{\bar{\gamma}\dot{\gamma}}{r}\right) + i\Im\left(\frac{\bar{\gamma}\dot{\gamma}}{r}\right)\right\}\gamma - r\dot{\gamma}$$

$$= e^{i\varphi}\left\{\frac{\bar{\gamma}\dot{\gamma}}{r} - r\dot{\gamma}\right\} = 0 \quad (\dot{\gamma}\gamma = r^2) \text{ (für } t \text{ wo } \gamma \text{ dbar)}$$

$$\frac{\delta}{\gamma}(0) = 1 \frac{\delta}{\gamma} \text{ konstant, also}$$

$$\forall t \in [0, 1] : \gamma(t) = \delta(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$$

Eindeutigkeit:

Falls auch  $\gamma(t) = r(t)e^{i\tilde{\varphi}(t)}$  mit ste. Fu  $\tilde{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $\tilde{\varphi}(0) = \varphi_0$ , so

$$\forall t \in [0, 1] : \tilde{\varphi}(t) \in \varphi(t) + 2\pi\mathbb{Z},$$

$$\text{also: } \forall t \in [0, 1] \exists k(t) \in \mathbb{Z}, \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + 2\pi k(t), \quad k(0) = 0$$

$$k \text{ st., } k(0) = 0, \quad k \text{ hat Werte in } \mathbb{Z} \Rightarrow k \text{ konstant} = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi$$

□

**6.2. Bemerkung**

6.1 b) gilt auch, falls  $\gamma$  nur stetig

**Beweis**

Idee: Benutze lokale Invertierbarkeit der Abb.  $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$

zeige:  $\{t \in [0, 1] \mid \exists \text{ eindeutiges } \varphi(t) \text{ wie gewünscht}\}$  ist offen und abg. in  $[0, 1]$ ,  $\neq 0$

□

**6.3. Folgerung**

Für  $\gamma, r, \varphi$  wie in 6.1 gilt:  $(\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)})$

$$\Re\left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z}\right) = \log\left(\frac{r(1)}{r(0)}\right)$$

$$\Im\left(\int_{\gamma} \frac{dz}{z}\right) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \int_0^1 \left\langle \frac{1}{\bar{\gamma}(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt + i \int_0^1 \left\langle \frac{i}{\bar{\gamma}(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left\langle \frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle}_{\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}} dt + i \int_0^1 \underbrace{\left\langle \frac{i\dot{\gamma}(t)}{r^2(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle}_{\frac{\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1}{r^2(t)} = \dot{\varphi}(t)} dt \\ (\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \Rightarrow i\dot{\gamma} &= -\dot{\gamma}_2 + i\dot{\gamma}_1 = (-\dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_1)) \\ &= \log(r(1)) - \log(r(0)) + i(\varphi(1) - \varphi(0)) \end{aligned}$$

□

**6.4. Folgerung**

Falls  $\gamma$  wie in 6.1 geschlossen, so ist

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in i2\pi\mathbb{Z}$$

**Beweis**

$$\Re(\dots) = 0, \Im(\dots) = \varphi(1) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}, \text{ da } \gamma(1) = \gamma(0)$$

□

**6.5. Definition**

Für  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  geschlossen,  $PC^1$  heißt:

$$\nu_{\gamma}(0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \text{ Umlaufzahl von } \gamma \text{ bzgl. } 0$$

Entsprechend, falls  $z_0 \notin \text{Bild}(\gamma)$ :

$$\nu_{\gamma}(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Es ist  $\nu_{\gamma}(z_0) = \nu_{\gamma - z_0}(0)$ , wobei  $\gamma - z_0 : t \mapsto \gamma(t) - z_0$

$$\text{offenbar: } \nu_{\gamma}(0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}$$

**6.6. Folgerung**

$\nu_g(z_0)$  ist invariant unter Homotopien innerhalb  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

(und innerhalb der Klasse geschlossener Kurven), und lokal konstant bzgl.  $z_0$

(also lokal konstant auf jeder zshg. Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$ )

**Beweis**

Homotopieinvarianz klar.

$$\nu_{\gamma}(\tilde{z}_0) = \nu_{\gamma - \tilde{z}_0}(0) \supseteq \text{gleich, falls } |z_0 - \tilde{z}_0| \text{ genpnd klein, nach 1.12}$$

$$\nu_{\gamma}(z_0) = \nu_{\gamma - z_0}(0)$$

Also  $z_0 \mapsto \nu_{\gamma}(z_0)$  lokal konst.

□

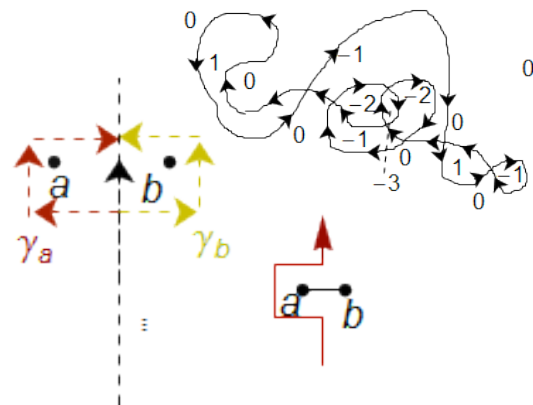
### 6.7. Beispiel

Trage in jede Zshgkomp' von  $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$  den Wert  $\nu_\gamma(z_0)$  ein  
 Einfache Regel: Überquerungen von  $\gamma$  von rechts nach links  
 (bei Bick in Richtung  $\dot{\gamma}$ ) erhöht Umlaufszahlwert

Begründung:  $\nu_\gamma(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-b} = \nu_{\gamma_a}(b) = \nu_{\gamma_a}(a)$

$$\nu_\gamma(a) = \nu_{\gamma_a}(a)$$

$$\nu_\gamma(a) - \nu_\gamma(b) = \nu_{\gamma_b}(a) - \nu_{\gamma_a}(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-a} = 1$$



## 7. Residuen-Kalkül

### 7.1. Definition

Sei  $z_0$  isol. Sgt. von  $f$  ( $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  hol.) und  $f$  habe bei  $z_0$  die Laurent-Entw.

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Die Zahl  $c_{-1}$  heißt **Residuum** von  $f$  bei  $z_0$ , in Zeichen:  $\text{Res}_{z_0} f = c_{-1}$

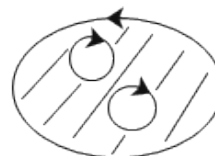
z.B.:  $\text{Res}_0 \frac{\sin(z)}{z^4} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$

### 7.2. Zykel

Eine formale Linearkombination  $\Gamma = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j$  und  $a_j \in \mathbb{Z}$  und geschlossene  $PC^1$ -Kurven  $\gamma_j$  heißt „**Zykel**“

$$\Gamma \text{ Zykel in } U \Leftrightarrow \bigcup_{j=1}^n \text{Bild}(\gamma_j) \subset U$$

Bedeutung:  $\int_\Gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\gamma_j} f(z) dz$



### 7.3. Bemerkung:Stokscher Satz in der Ebene

Folgt aus Stokescher Satz für 2-dim Umften. von  $\mathbb{R}^3$

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ ,  $F \subset U$  triangular.

(U hat Standard-Orientierung von  $\mathbb{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  pos. orietiert.)

Dann  $\int_{\partial F} \langle f, d\vec{s} \rangle = \int_F \underbrace{\text{rot}(F)}_{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1} dx dy$   $\partial F$ : Rand mit der induzierten Orientierung)

### 7.4. Residuensatz

Vorraussetzung:

a) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $K \subset U$  offen,  $\overline{K} \subset U$ , kp., triangulierbar

b) Sei  $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  Zykel in U mit  $\partial K = \bigcup_{j=1}^n \text{Bild}(\gamma_j)$

(Vereinigung disjunkt bis evtl auf endlich viele Punkte.)

$\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_j|_{[a_j, b_j]}$  injektiv

Die  $\gamma_j$  seien positiv orientiert (K „zur Linken“ von  $\gamma_j$ )

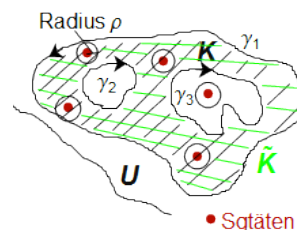
$(\det[\dot{\gamma}_j(t), \nu_{int}(\gamma_j(t))]) > 0$ ,  $\nu_{int}$ : inverse Normale

c)  $f$  sei in  $U$  hol. bis auf isol. Sgten., von denen keine auf  $\partial K$  liegt.

Behauptung:

Dann hat  $f$  nur endlich viele Sgten. in  $K$  und

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \text{Sgt.} \in K} \text{Res}_a f$$



**Bemerkung:**  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in K \\ a \text{ Sgt. von } f}} \text{Res}_a f$$

**Beweis**

1. Die Menge  $S$  der Sgten. von  $f$  in  $U$  ist (in  $U$ ) abg. (auf dem Komplement  $f$  lokal durch Potenzreihenentw. gegeben, Komplement offen)

Also  $S \cap K$  kp., besteht aus isol. Pkten., ist also endlich.

Damit  $\exists a_1, \dots, a_k$  paarweise verschieden, so dass

$$S \cap K = \{a_1, \dots, a_k\} \text{ (aber } S \cap K \neq \emptyset \text{)}.$$

Nach Vor.: Alle  $a_j$  in  $\mathring{K}$

2. Es ex.  $\rho > 0$  mit  $\forall l \in \{1, \dots, k\} : B(a_l, 2\rho) \subset \mathring{K}$  und  $\text{hol. in } B(a_l, 2\rho) \setminus \{a_l\}$   
 $\overline{B(a_l, \rho)} \cap \overline{B(a_m, \rho)} = \emptyset$  für  $l \neq m$

Def.  $\tilde{K} := K \setminus \bigcup_{l=1}^k B(a_l, \rho)$  („Ausstanzen der Sgten.“)

Setze  $\kappa_l(t) := a_l + \rho e^{-2\pi i t}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $l = 1, \dots, k$

Dann  $\partial \tilde{K} = \partial K \cup \bigcup_{l=1}^k \text{Bild}(\kappa_l)$  und die  $\kappa_l$  sind in Bezug auf  $\tilde{K}$  pos. orientiert.

für hol. auf  $\tilde{K}$  und mit  $\tilde{\Gamma} := \Gamma + K_1 + \dots + K_k$  ist

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} \langle \bar{f}, d\vec{s} \rangle + i \int_{\tilde{\Gamma}} \langle i\bar{f}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \int_{\tilde{K}} \underbrace{\text{rot}(\bar{f})}_{=0} + i \int_{\tilde{K}} \underbrace{\text{rot}(i\bar{f})}_{=0} = 0$$

$$\text{Also: } \int_{\Gamma} f(z) dz = - \sum_{j=1}^k \int_{\kappa_j} f(z) dz = \sum_{l=1}^k \underbrace{\oint_{|z-a_l|=\rho} f(z) dz}_{=2\pi i \cdot c_{-1,l}} = \sum_{l=1}^k 2\pi i \text{Res}_{a_l} f \text{ Laurent-}$$

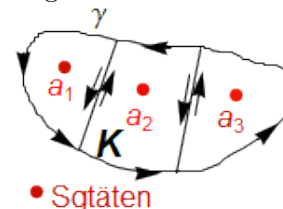
$$\text{Koeff.: } c_{n,l} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a_l|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

□

**Bemerkung** Richtigkeit des Satzes in konkreten Fällen oft auch „dichter“ einsehbar, z.B.:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\square} \dots + \int_{\square} \dots + \int_{\square} \dots = \int_{\circ} \dots + \int_{\circ} \dots + \int_{\circ} \dots = 2\pi i \sum_{l=1}^3 \text{Res}_{a_l} f$$

Diese Zerschneidung allgemein zu beschreiben wäre schwierig - im Beweis oben steckt sie in der Triangulierung im Satz vom Stokes.



**Bemerkung** Andere Formulierungen möglich, vgl. z.b. Jänich

$$\left(\sum a_j z^j\right)\left(\sum b_l z^k\right) = \sum_l \left(\sum_{\substack{j,k \\ j+k=l}} a_j b_k\right) z_l$$



### 7.5. Beispiele

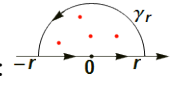
- a) Sei  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  rationale Fu. ( $p, q$  Polynomfu'n),  $Grad(q) \geq Grad(p) + 2$  und  $q$  habe kein Ns. auf  $\mathbb{R}$

$$\text{Dann } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\xi, \xi \text{ Ns von } q \\ \Im(\xi) > 0}} Res_{\xi} R$$

**Beweis**

$q$  hat nur endl. viele Ns. mit  $\Im(\xi) > 0$

Für  $r > 0$  groß genug liegen alle diese Ns. im Inneren von  $\gamma_r$ , wobei  $\gamma_r$ :



$$\int_{\gamma_r} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{\xi, \xi \text{ Ns von } q \\ \Im(\xi) > 0}} Res_{\xi} R \quad (\text{Residuensatz})$$

$$= \int_{-r}^r R(x) dx + \underbrace{\int_0^{\pi} \underbrace{R(re^{it}}_{|\cdot| \leq \frac{\text{const.}}{r^2}} r i e^{it} dt}_{\rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow \infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

□

**Beispiel zu 7.5**


$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$R(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1} = \frac{1}{\underbrace{(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))}_{\Im(\xi) > 0}}$$

$Res_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0)$  falls  $g$  hol. in Umg um  $z_0$

$$\Rightarrow Res_{-1+i} R = \frac{1}{(-1+i - (-1-i))} = \frac{1}{2i}$$

$$I = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Analog:   $:\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\xi, \Im \xi < 0} Res_{\xi} R$

- b) Für  $R = \frac{p}{q}$  wie in a) gilt entspr. Aussage auch für

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx \quad (= 2\pi i \sum_{\substack{\xi, \Im(\xi) > 0 \\ q(\xi) = 0}} Res_{\xi} R(z) e^{iz})$$

Folgt aus  $|e^{ire^{it}}| \leq 1$  falls  $r > 0, t \in [0, \pi]$

Aussage von b) gilt auch noch, falls nur  $Grad(q) \geq Grad(p) + 1$ , allerdings

dann Konvergenz von  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx$  nur um uneig. Riemannschen Sinn, *nicht absolut!*

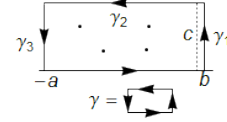
**Beweis**

zu b)

$$2\pi i \sum_{\substack{\xi, \operatorname{Im}(\xi) > 0 \\ q(\xi) = 0}} \operatorname{Res}_{\xi} R(z) e^{iz} = \int_{\gamma} R(z) e^{iz} dz = \int_{-a}^b + \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots$$

$$\gamma_1(t) = b + it, t \in [0, c]$$

$$\left| \int_{\gamma_1} R(z) e^{iz} dz \right| \leq \sup_{|z| \geq b} |Z(z)| \underbrace{\left| \int_0^c e^{i(b+it)} i dt \right|}_{\leq \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$$



$$\text{Analog: } \int_{\gamma_3} \dots \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| \int_{\gamma_2} R(z) e^{iz} dz \right| \leq \sup_{|z| \geq c} |R(z)| \underbrace{\left| \int_{-a}^b e^{i(x+ic)} dx \right|}_{= e^{-c}(a+b)}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Es. ex.  $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$  mit  $\left| \int_{\gamma_1} \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , falls  $a \geq \tilde{a}$ ,  $b \geq \tilde{b}$

Für  $a \geq \tilde{a}, b \geq \tilde{b}$  ex.  $\tilde{c} > 0$  mit  $\left| \int_{\gamma_2} \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  für  $c \geq \tilde{c}$

$$\text{Folgt: } \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_{-a}^b R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\xi(\xi) \\ q(\xi) = 0}} \operatorname{Res}_{\xi} R(z) e^{iz} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx$$

□

**Beispiel zu zu b)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \Re \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx}_{= 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}} \right) = 2\pi i \frac{e^{ii}}{i+i} = \frac{\pi}{e}$$

**7.6. Definition**

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

Falls  $\forall \delta > 0 : \int_{-\infty}^{a-\delta} f(x) dx, \int_{a+\delta}^{\infty} f(x) dx$  ex.

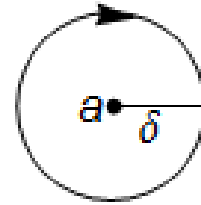
und  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{a-\delta} f(x) dx + \int_{a+\delta}^{\infty} f(x) dx$  ex. so heißt die Zahl

**Cauchyscher Hauptwert** von  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , in Zeichen:  $HW \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Entsprechend für endlich viele Sgten. auf  $\mathbb{R}$ .



**7.7. Bemerkung**



Sei  $a$  einfacher Pol von  $f$ , und für  $\delta > 0$  sei

$$\kappa_\delta(t) := a + \delta e^{i\pi(1-t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Dann  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\kappa_\delta} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}_a f$ .

**Beweis**

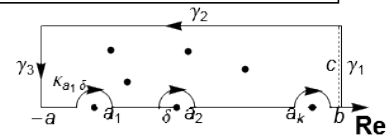
Es ex.  $g$  hol. auf Umg. von  $a$ , so dass

$f(z) = \frac{c-1}{z-a} + g(z)$  auf dieser Umg. Für  $\delta$  klein genug

$$\int_{\kappa_\delta} f(z) dz = \underbrace{\int_{\kappa_\delta} \frac{c-1}{z-a} dz}_{=-\pi i c_{-1}} + \underbrace{\int_{\kappa_\delta} g(z) dz}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -\pi i c_{-1}$$

□

**7.8. Bemerkung**



Falls  $R = \frac{p}{q}$ ,  $\operatorname{Grad}(q) \geq \operatorname{Grad}(p) + 1$  und  $R$  auf  $\mathbb{R}$  höchstens einfache Pole  $a_1, \dots, a_k$

hat,

dann ist HW  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\zeta, q(\zeta)=0, \\ \Im(\zeta)>0}} \operatorname{Res}_\zeta R(z) e^{iz} + \pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} R(z) e^{iz}$

Mit  $\gamma$  wie im Bild (zu  $a, b, c, \delta > 0$ ) ist  $\int_\gamma R(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\Im(\zeta)>0 \\ q(\zeta)=0}} \operatorname{Res}_\zeta R(z) e^{iz}$

$$\int_{-a}^{a_1-\delta} \dots + \int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} \dots + \dots + \int_{a_k+\delta}^b \dots + \sum_{j=1}^k \int_{\kappa_{a_j}} \dots + \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots$$

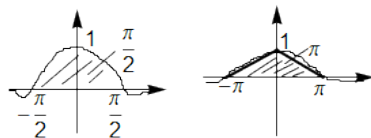
Für  $a, b \rightarrow \infty$   $c = c(a, b)$  jeweils passen folgt wie oben:  $\int_{-\infty}^{a_1-\delta} \dots + \dots + \int_{a_k+\delta}^{\infty} \dots$  ex. und

$$\int_{-\infty}^{a_1-\delta} \dots + \int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} \dots + \dots + \int_{a_k+\delta}^{\infty} \dots = 2\pi i \sum_{\substack{\Im(\zeta)>0 \\ q(\zeta)=0}} \operatorname{Res}_\zeta R(z) e^{iz} + \pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{a_j} R(z) e^{iz} - \underbrace{r(\delta)}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0}$$

Behauptung folgt.

**Beispiel zu**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \Im(HW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ix} dx) = \Im(\pi i \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z} e^{iz}) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$



### 7.9. Lemma

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $a_1, \dots, a_n \in U$  paarw. verschieden

$f: U \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  hol.

Dann ex.  $g \in \mathcal{O}(U)$  und  $h_1, \dots, h_n, h_j \in \mathcal{O}(U \setminus \{a_j\})$ , so dass

$$f = g + \sum_{j=1}^n h_j \text{ auf } U \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \quad (*)$$

#### Beweis

Sei  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(j)} (z - a_j)^n$  die lokale Laurent-Entw. von  $f$  bei  $a_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )

Dann  $\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists \rho_j > 0 : \sum_{n < 0} c_n^{(j)} (z - a_j)^n$  konv. für  $z \in \mathbb{C}, 0 < |z - a_j| < \rho_j$

Also  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} \left(\frac{1}{z-a_j}\right)^n$  kann für  $z \in \mathbb{C}, 0 < |z - a_j| < \rho_j$ .

Also  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} w^n$  konv. für  $|w| > \frac{1}{\rho}$ , also für alle  $w \in \mathbb{C}$

Def.  $h_j(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{(j)} \left(\frac{1}{z-a_j}\right)^n \quad (z \in U \setminus \{a_j\})$

Dann  $h_j \in \mathcal{O}(U \setminus \{a_j\})$

Setze  $\tilde{g}(z) := f(z) - \sum_{j=1}^n h_j(z), z \in U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

Dann  $\tilde{g} \in \mathcal{O}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$  und  $\tilde{g}$  hat bei  $a_j$  die Laurent-Entw.

$$\sum_{n \geq 0} c_n^{(j)} (z - a_j)^n - \underbrace{\left( \text{Laurent-Entw. von } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n h_k \text{ bei } a_j \right)}_{\text{enthält nur Potenzen } \geq 0 \text{ von } (z-a_j)}$$

Sgt.

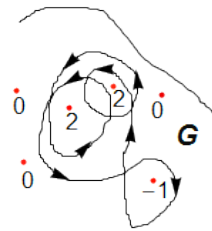
Mit hol. Fortsetzung  $g$  von  $\tilde{g}$  auf ganz  $U$  gilt (\*). □

### 7.10. Residuensatz (Version mit Umlaufszahl)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiete  $S \subset G$  endlich,  $f \in \mathcal{O}(G \setminus S)$

Sei  $\gamma$  geschl. Kurve in  $G \setminus S$  und  $\gamma$  sei in  $G$  nullhomotop  
(in der Klasse geschl. Kurven)

$$\text{Dann gilt } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in S} \nu_{\gamma}(a) \cdot \text{Res}_a f$$



**Beweis**

Falls  $S = \emptyset$ , so beide Seiten (Cauchy-Integralsatz)

Sonst  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  paarw. verschieden. Mit  $g$  und  $h_j$  wie in 7.9 ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma} h_j(z) dz$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ nach C.I.S.}}$

Für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h_j(z) dz &= \int_{\gamma} \sum_{n < 0} c_n^{(j)} (z - a_j)^n dz \\ &= \int_{\gamma} c_{-1}^{(j)} \frac{dz}{z - a_j} = \underbrace{c_{-1}^{(j)}}_{\text{Res}_{a_j} f} \cdot 2\pi i \nu_{\gamma}(a_j) \end{aligned}$$

$$\text{Also } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{a_j} f \nu_{\gamma}(a_j)$$

□

**7.11. Null- und Polstellen zählendes Integral**

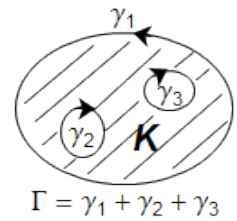
Unter den Vor'n des Residuensatzes 7.3 sei zusätzlich  $f$  meromorph in  $U$  (d.h. keine wesentlichen Sgten.)

und habe keine NS auf  $\Gamma (= \gamma_1 + \dots + \gamma_n)$  (auf  $\bigcup_{j=1}^n \text{Bild}(\gamma_j)$ )

Dann ist  $\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$

Wobei  $N$  die Summe der Nullstellenordnungen,  
 $P$  die Summe der Polordnungen von  $f$  in  $K$  ist.

( $\partial K = \bigcup_{j=1}^n \text{Bild}(\gamma_j)$ )



**Beweis**

Nach Residuensatz:  $\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left( \sum_{\substack{a \in K \\ f(a)=0}} \text{Res}_a \frac{f'}{f} + \sum_{\substack{a \in K, \\ a \text{ Sg. von } f \\ (\text{jetzt Pole})}} \text{Res}_a \frac{f'}{f} \right)$

- Falls  $f(a) = 0$ , so  $f(z) = (z - a)^k g(z)$ ,  $g(a) \neq 0$  (lokal bei  $a$ )

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Also  $\text{Res}_a \frac{f'}{f} = k$  (NS-Ordnung), also  $\tilde{N} = N$

- Falls  $a$  Pol von  $f$ , so

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}, \quad g(a) \neq 0, \quad g \text{ hol. auf Umg von } a, \quad k \text{ ist Polordnung}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z-a)^k - g(z)k(z-a)^{k-1}}{(z-a)^{2k}} \frac{(z-a)^k}{g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{k}{z-a}$$

Also  $\text{Res}_a \frac{f'}{f} = -k$  (-Polordnung), also  $\tilde{P} = -P$

Behauptung folgt.

□

**7.12. Bemerkung**

Falls  $f$  keine NS auf  $Bild(\gamma)$  hat, so  $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \nu_{f \circ \gamma}(0)$

**Beweis**

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt = \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \nu_{f \circ \gamma}(0)$$

□

**7.13. Folgerung: Satz von Rouché**

Unter den Vor'n des Residuensatzes 7.3 sei  $f$  hol. auf  $U$  und weiter  $g \in \mathcal{O}(U)$  und  $\forall z \in \underbrace{Bild(\Gamma)}_{\cup_j Bild(\gamma_j)} : |g(z)| < |f(z)|$

Dann:  $N_f = N_{f+g}$

( $N_f, N_{f+g}$ : Nullstellen Zahlen in  $K$ , jede mit Vielfachheit gezählt)

**Beweis**

Nach dem Satz von Null- und Polstellen zählenden Integral:  $2\pi i \cdot N_f = \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$

$$\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{f \circ \gamma_j} \frac{dz}{z} = \sum_{j=1}^n \int_{(f+g) \circ \gamma_j} \frac{dz}{z} (f+g) \circ \gamma_j \text{ homotop in } \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

Homotopie  $H(s, t) := (f \circ \gamma_j)(t) + s(g \circ \gamma_j)(t), \in [a, b], s \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \dots = 2\pi i N_{f+g}$$

□

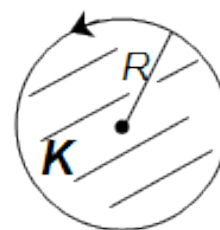
**Beispiel zu 7.13**

$$p(z) = \underbrace{a_n z^n}_{=: f(z)} + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}_{=: g(z)}, \text{ mit } a_n \neq 0$$

$$\exists R > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z| = R : |f(z)| > |g(z)|$$

Nach Rouché:  $N_f (= K := \overline{B(0, R)}, \text{ trivial}) = N_{f+g} = N_f$

$N_g = K$  (trivial)



**8. Komplexer Logarithmus**

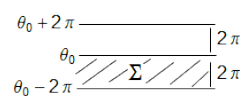
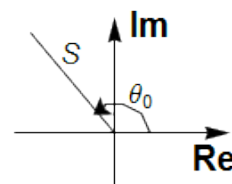
**8.1. Bemerkung/Definition**

Sei  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  und  $S \subset \mathbb{C}$  die *Halbgerade*  $\mathbb{R}^+_0 e^{i\theta_0}$

a) Dann ist mit  $\Sigma := \{x + iy \in \mathbb{C} | y \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$

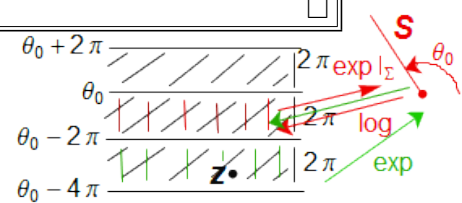
$\exp|_{\Sigma} := \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$  bijektiv (biholomorph)

und hat holom. Umkehrfu.  $\log : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \Sigma$  (einen „Zweig des Logarithmus“)



- b) Falls  $\theta_0 = \pi$  (dann  $S = \mathbb{R}_0^-$ ) so heißt die entspr. Fu. *Hauptzweig* des Logarithmus.  
Ihre Einschränkung auf  $(0, \infty)$  ist der bekannte reelle log.
- c)  $\log'(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{C} \setminus S$

**Beweis**  
Leicht: Diffbarkeit der Umkehrfkt.  $\exp' = \exp \neq 0$  stetig. □



**8.2. Folgerung**

Falls log ein Zweig des Logar. auf  $\mathbb{C} \setminus S$ , so gilt:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus S : z = \exp(\log(z))$$

aber nicht:  $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \in \mathbb{C} \setminus S : z = \log(\exp(z))$ , sondern nur:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \in \mathbb{C} \setminus S : \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log(\exp(z)) + 2ki\pi$$

Es ist  $k = 0 \Leftrightarrow \Im(z) \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$

**8.3. Folgerung**

Falls  $z = re^{i\theta}$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  und log ein Zweig des Logarithmus  $\theta_0$  wie oben, so ist, falls  $\theta - \theta_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\log(z) = \underbrace{\log(r)}_{\text{reeller log}} + i(\theta - 2\pi k), \text{ wobei } k \in \mathbb{Z} \text{ die eindeutige Zahl ist mit } \theta - 2\pi k \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0).$$

**Bemerkung** Versuch für  $z \mapsto \exp(z)$  eine ähnliche Fläche zu konstruieren wie in Übungen für  $z \mapsto z^3$  würde auf „unendliche Wendeltreppe“ führen.  
(„*Riemannsche Fläche* des log“)

**8.4. Bemerkung**

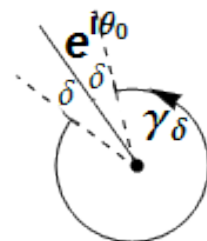
Der Wert von  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$  wird mittels des log nochmal auf andere Weise verständlich:

Sei „log“ Zweig des log zu  $\theta_0$  wie oben.

$$\gamma(t) := e^{it}, \quad t \in [\theta_0 - 2\pi, \theta_0] \quad \gamma_\delta := \gamma|_{[\theta_0 + 2\pi + \delta, \theta_0 - \delta]} \quad (|\delta| < 2\pi)$$

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} &= \log(\gamma_\delta(\theta_0 - \delta)) - \log(\gamma_\delta(\theta_0 - 2\pi + \delta)) \\ &= \log(1) + i(\theta_0 - \delta) - [\log(1) + i(\theta_0 - 2\pi + \delta)] = i(2\pi + 2\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi i \end{aligned}$$



### 8.5. Folgerung/Definition

Auf einer geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus S$  wie oben kann für  $\alpha \in \mathbb{C}$  eine Potenzfu.  $z \mapsto z^\alpha$  durch  $z^\alpha := \exp(\alpha \cdot \underbrace{\log(z)}_{\text{Zweig des log auf } \mathbb{C} \setminus S})$  Diese Funktion ist dann hol. und

$$\frac{d}{dz}[z \mapsto z^\alpha] = \alpha z^{\alpha-1} = 1$$

**Beweis**

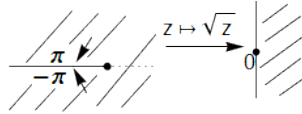
Def. von  $z^\alpha$  klar. Formel:  
 $\frac{d}{dz}[z \mapsto z^\alpha] = \exp(\alpha \cdot \log(z)) \cdot \alpha \frac{1}{z} = \alpha z^\alpha \cdot z^{-1} = \alpha z^{\alpha-1}$  (Denn  $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$ )

□

**Beispiel zu 8.5**

$\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $z \mapsto \sqrt{z}$  kann auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  def. werden:

Falls  $z = \gamma e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$   
 so ist  $\sqrt{z} = \underbrace{\sqrt{\gamma}}_{\text{reelle Wurzel}} e^{i\varphi/2}$



## 9. Folgen hol. Fu'n

### 9.1. Definition

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet,  $f_n \in \mathcal{O}(G)$

$(f_n)$  heißt **kompakt konvergent**  $\Leftrightarrow \forall K \subset G$  kp.:  $f_n|_K$  gl konv.

### 9.2. Bemerkung

$(f_n)$  kp. konv.  $\Leftrightarrow (f_n)$  lokal glm. konv. d.h.:

$\forall z_0 \in G \exists r > 0 : (f|_{B(z_0,r)})$  glm. konv.

### 9.3. Satz: Weierstraß

$(f_n) \subset \mathcal{O}(G), f_n \rightarrow f$  kp.  $\Rightarrow f \in \mathcal{O}(G)$

**Beweis**

Sei  $z_0 \in G$ . Ex ex.  $r > 0$  mit  $K := \overline{B(z_0, r)} \subset G$

$f_n|_K \xrightarrow{\text{glm.}} f|_K$ , also  $f|_K$  stetig. Folgt:  $f$  stetig.

$\forall z_0, z_1, z_2$  mit  $\begin{array}{c} z_2 \\ \swarrow \searrow \\ z_0 \quad z_3 \end{array} \subset G : \oint f(z) dz = 0$

Mit  $\gamma := \overline{z_0 z_1} \cup \overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_0} : \gamma \text{ kpkt.},$  also  $f_n|_{\text{Bild}(\gamma)} \xrightarrow{\text{glm.}} f|_{\text{Bild}(\gamma)}$

Also  $\underbrace{\int_{\gamma} f_n(z) dz}_{\stackrel{!}{=} 0} \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$ , also  $\oint f(z) dz = 0$  \*: da  $f_n \in \mathcal{O}(G)$ , (Cauchy-Integralsatz)

□

**9.4. Folgerung**

In der Sit. von 9.3 gilt:  $f'_n \rightarrow f'$  kp. in  $G$

**Beweis**

Idee: Sei  $z_0 \in G$ ,  $r > 0$ ,  $\overline{B(z_0, 2r)} \subset G$

Dann  $\forall z \in B(z_0, r) \forall n \in \mathbb{N} : |f'_n(z) - f'(z)|$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right|$$

Folgt;  $f'_n \rightarrow f'$  glm. auf  $\overline{B(z_0, r)}$

□

**9.5. Satz**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet  $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ ,  $f_n \rightarrow f$  kp. in  $G$ .

Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{C}$  und

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{-1}(\{a\}) \text{ endlich und } \sum_{\substack{z \in G \\ f_n(z)=a}} \underbrace{O_z(f_n - a)}_{\text{Nullstellenord. v. } f_n - a} \leq m$$

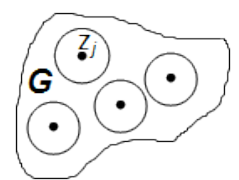
(„jedes  $f_n$  hat höchstens  $m$   $a$ -Stellen“)

Dann  $\sum_{\substack{z \in G \\ f(z)=a}} O_z(f - a) \leq m$  oder  $f$  konstant =  $a$ .

**Beweis**

O.E.  $a = 0$  (sonst betrachte  $f_n - a, f - a$ )

Ann.  $f$  nicht konst. 0, und  $\sum_{\substack{z \in G \\ f(z)=0}} O_z(f) \geq m + 1$



Es ex.  $r \in \mathbb{N}$  und paarweise versch.  $z_1, \dots, z_r \in G$  mit  $\sum_{j=1}^r O_{z_j}(f) \geq m + 1$

Nach Identitätssatz NS isoliert, also ex.  $\rho > 0$  mit:  
 $B(z_j, \rho)$  paarweise disjunkt und  $\forall j \in \{1, \dots, r\} : \overline{B(z_j, \rho)} \subset G$   
 $\overline{B(z_j, \rho)} \cap f^{-1}(\{0\}) = \{z_j\}$   
 $K := \bigcup_{j=1}^r \partial \overline{B(z_j, \rho)}$  kp.  $f$  hat keine NS auf  $K$ .

Somit  $\mu := \min_{z \in K} |f(z)| > 0$

Sei  $n \in \mathbb{N} |f_n - f| < \mu$  auf  $K$ .

Nach Rouché (mit  $f$  und  $f_n - f$  als „g“),  $U := B(z_j, \rho)$  ( $j = 1, \dots, r$ )

$\forall j \in \{1, \dots, r\} : \sum_{\substack{z \in f_n^{-1}(\{0\}) \\ \cap B(z_j, \rho)}} = \sum_{\substack{z \in f^{-1}(\{0\}) \\ \cap B(z_j, \rho)}} O_z(f) = O_{z_j}(f)$

Somit  $\sum_{\substack{z \in G \\ f_n(z)=0}} O_z(f_n) \geq \sum_{j=1}^r O_{z_j}(f) \geq m + 1$

Wid. zur Voraussetzung. □

**9.6. Satz: Montel**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  Gebiet,  $f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  lokal beschränkt

D.h.  $\forall z \exists r > 0 : (f_n|_{B(z,r)})$  beschr.

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $(f_{\varphi(n)}) \subset (f_n), f_{\varphi(n)}$  kpkt. konvergent

Verwandt mit dem Satz von Arzelà-Ascoli

Wesentlich für beide: glm. Kontrolle von  $f(z_1) - f(z_2)$  glm. bzgl. n.

**10. Riemannscher Abb.satz**

**10.1. Definition**

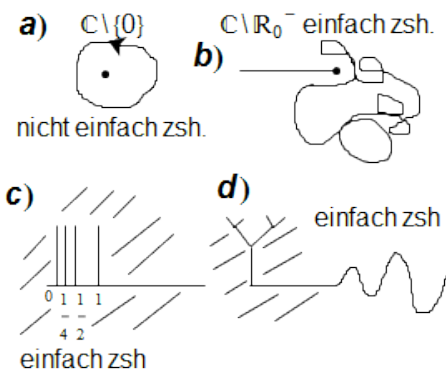
$G \subset \mathbb{C}$  heißt einfach zusammenhängend  $\Leftrightarrow G$  ist zshg. und jede geschl. Kurve  $\gamma$  in  $G$  ist in  $G$  nullhomotop in der Klasse der geschl. Kurven.

a)  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nicht einfach zsh.

b)  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$  einfach zsh.

c) einfach zsh.

d) einfach zsh.





## 10.2. Bemerkung

1. Auf jedem einfach zshg Teilgebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ex. eine Stammfu. von  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , also ein Zweig des  $\log$   
(Beweis mit Monochromiesatz)
2. Auf  $G$  wie oben ex. eine „**Quadratwurzel**“, d.h. eine hol. Fu  $\sqrt{\cdot} : G \rightarrow G$ ,  
 $\forall z \in G : (\sqrt{z})^2 = z$   
 $\sqrt{\cdot}$  bildet  $G$  bihol. auf  $\sqrt{G}$  ab.

### Beweis

$\sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2} \log z)$ . Dann  $(\sqrt{z})^2 = \exp(\log(z)) = z (z \in G)$

$\sqrt{\cdot}$  ist injektiv:  $\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2$

$\sqrt{\cdot}$  bihol. folgt nun aus  $\sqrt{(z)'} \neq 0$

□

## 10.3. Satz: Automorphismengruppe von $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

$$\{f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \text{ biholom.}\} = \{\mathbb{E} \ni z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-w}{1-\bar{w}z}, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{E}\}$$

## 10.4. Satz: Riemannscher Abb.satz

Sei  $G \subset \mathbb{R}$  einfach zusammenhängendes Gebiet,  $\emptyset \neq G \neq \mathbb{C}$

Dann ex.  $f : G \rightarrow \mathbb{E}$  biholomorph.

### Beweis

1. Falls  $0 \notin G$ , so setze  $G_1 := G$ . Sonst  $a \notin G$ ,  $a \neq 0$ .  
Setze dann  $G_1 := G - a$ , dann  $0 \notin G_1$  und die Abb.  $G \rightarrow G_1$  und die Abb.  $G_1 \rightarrow G$ ,  $z \mapsto z - a$  ist bihol.
2. Nach 10.2 ex. Quadratwurzel auf  $G_1$  ( $G_1$  ist einfach zshg.) mit  $G_2 := \sqrt{G_1}$  ist  $\sqrt{\cdot} : G_1 \rightarrow G_2$  bihol.
3. Falls  $w \in G_2$ , so ist  $-w \notin G_2$  (sonst ex.  $z_1, z_2 \in G_1$ ,  $w = \sqrt{z_1}$ ,  $-w = \sqrt{z_2}$ ,  $z_1 = w^2 = (-w)^2 = z_2$ , also  $w = \sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} = -w$ ,  $w = 0$ , also  $z_1, z_2 = 0 \in G_1$ , Wid.)

□

Wähle  $w_0 \in G_2$  und  $r > 0$  mit  $\overline{B(w_0, r)} \subset G_2$ ,

dann  $\overline{B(-w_0, r)} \subset \mathbb{C} \setminus G_2$

Def.  $\rho : G_2 \ni z \mapsto \frac{r}{z - (-w_0)} \in \mathbb{C}$

Es ist  $\rho(G_2) \subset \mathbb{E}$ .  $\rho(G_2)$  ist Gebiet,

$\rho : G_2 \rightarrow \rho(G_2)$  bihol.

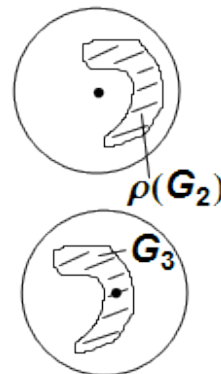
Wähle  $b \in \rho(G_2)$  beliebig auf



def.  $\tau : \rho(G_2) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau(z) := \frac{z-b}{2}$   
 $\forall z \in \rho(G_2) : |\tau(z)| \leq \frac{|z|+|b|}{2} < 1$ .

Setze  $G_3 := \tau(G_2)$ , dann  $0 \in G_3 \subset \mathbb{E}$ ,  $G \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} G_1 \xrightarrow{\rho} G_2 \xrightarrow{\tau} \rho(G_2) \xrightarrow{\tau} G_3$  alles bihol.

Ab jetzt: Beweis des Satzes für den Fall  $0 \in G \subset \mathbb{E}$



4. Sei jetzt  $0 \in G \subset E$

Sei  $\mathcal{F} := \{f : G \rightarrow \mathbb{E} \text{ hol, injektiv, } f(0) = 0, f'(0) \in (0, \infty)\}$

Beh.: Es ex.  $f \in \mathcal{F}$  mit  $f'(0)$  maximal (unter allen  $g'(0)$ ,  $g \in \mathcal{F}$ )

**Beweis**

Es ex.  $\varepsilon > 0$  mit  $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset G$ . Für  $f \in \mathcal{F}$  ist

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$$

Also ex.  $\sigma := \sup\{f'(0) | f \in \mathcal{F}\}$ ,  $\sigma \leq \frac{1}{\varepsilon}$ , da  $z \mapsto z \in \mathcal{F}$  ist  $\sigma \geq 1$

Also wähle Folge  $(f_n) \subset \mathcal{F}$ ,  $f'_n(0) \rightarrow \sigma$ ,  $|f_n| \leq 1 \forall n$ . nach Montel ex. Teilf.  $(f_{\varphi(n)}) \subset (f_n)$  und  $f \in \mathcal{O}(G)$ ,  $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{kp.} f$ .

$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varphi(n)}(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_{\varphi(n)}(0) = \sigma \geq 1$ , insbes. f nicht konstant

Mit dem Satz über die „a-Stellen der Grenzfunktion“ folgt: f injektiv

Für  $z \in G$  ist  $|f(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{\varphi(n)}(z)| \leq 1$

Nach Satz über Gebietstreue:  $f(G)$  Gebiet, also offen, also ex. kein  $z \in G$  mit  $|f(z)| = 1$

Somit  $f(G) \subset \mathbb{E}$

Folgt:  $f \in \mathcal{F}$ ,  $f'(0)$  maximal □

5. Reicht zu zeigen  $f : G \rightarrow \mathbb{E}$  ist surj.

**Beweis**

Annahme:  $\exists w_0 \in \mathbb{E} \setminus f(G)$

Def:  $g : G \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $g := (z \mapsto \frac{z-w_0}{1-\overline{w_0}z}) \circ f$

Dann  $0 \notin g(G)$  (einfach zshg. Gebiet)

Also ex.  $\sqrt{\cdot}$  auf  $g(G)$

Setze  $w_1 := \sqrt{g(0)}$  und def.  $F : (z \mapsto \frac{z-w_0}{1-\overline{w_0}z}) \circ \sqrt{\cdot} \circ g : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

Es ist  $F(G) \subset \mathbb{E}$ ,  $F(0) = 0$ , F injektiv

Beh:  $|F'(0)| > |f'(0)|$  □

Setze  $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $\tilde{f}(z) := \frac{F'(0)}{f'(0)} F(z)$ . Dann  $\tilde{f}$  hol., injektiv,

$\tilde{f}'(0) = |F'(0)| > |f'(0)|$ , also  $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ ,  $\tilde{f}(0) > f(0)$ , Wid.

Also Annahme falsch  $\Rightarrow$  f surj.

## Stichwortverzeichnis

<b>A</b>	
Adiagonalisierbar .....	12
Anfangswertproblems .....	3
Ausstanzen der Sgten. ....	65
autonome DGL .....	1
autonomen und eindimensionalen DGL .....	6
<b>B</b>	
benachbarte Lösung .....	30
biholomoprh .....	53
<b>C</b>	
Cauchy-Formel für Taylor .....	51
Cauchyscher Hauptwert .....	67
<b>D</b>	
Diffeomorphismus .....	21
<b>E</b>	
Einzugsbereich .....	36
Entwicklungsoperatoren .....	4, 17
erstes Integral .....	2
Eulersche Polynomzugverfahren .....	27
Evolutionsooperatoren .....	32
<b>F</b>	
Fluss .....	3
Flusslinien .....	3
Fundamentalmatrixlösung .....	16
Fundamentalsystem .....	7, 16
Funktionaldiffgln .....	1
<b>G</b>	
Gebiet .....	54
Gewöhnliche DGL .....	1
Gleichgewichtslösung .....	2
gleichmäßig asymptotisch stabil .....	34
Globaler Diskretisierungsfehler .....	27
<b>H</b>	
Halbgerade .....	71
Harmonischer Oszillator .....	8, 21
Hauptteil .....	58
Hauptzweig .....	72
hebbare Sgt .....	56
<b>I</b>	
Hintereinanderdurchlaufung .....	49
Homotopie .....	49
Hyperebene .....	41
<b>J</b>	
Jordan-Normalform .....	11, 14
<b>K</b>	
k-fache Nullstelle .....	53
Körper der meromorphen Fu'n .....	58
Kodimension .....	41
kompakt konvergent .....	73
Kreisring .....	59
<b>L</b>	
Laurent-Entwicklung .....	60
Laurentreihe .....	58
Liapunov-Funktion .....	36
Liapunov-stabil .....	34
linear beschränkt .....	30
lineare Variationsgleichung .....	29
lineares Funktional .....	42
logistische Gleichung .....	1
lokal beschränkt .....	75
lokal Lipschitz-stetig .....	22
lokale Lipschitz-Bedingung .....	23
lokale Lipschitzbedingung .....	22
<b>M</b>	
Möbius-Transformation .....	45
Matrixnorm .....	11
maximale Lösung .....	3
meromorph .....	57
Monodromieoperator .....	39
<b>N</b>	
Nebenteil .....	58
nichtautonome DGL .....	1
nilpotente Matrix .....	11
Niveaulinien .....	2
Normäquivalenz .....	16
nullhomotop .....	50

**O**

orbitale Ableitung .....	36
Ordnung des Poles .....	56

**P**

Partielle DGL .....	1
periodisch Lösung .....	4
Phasenportrait .....	2, 8
Picard-Iterierte .....	24
Poincareabb .....	42
Pol .....	56
Potentialgebirge .....	21
Pulverfassgleichung .....	28

**Q**

Quadratwurzel .....	76
---------------------	----

**R**

Räuber-Beute-Modell .....	1
Residuum .....	64
Riemannsche Fläche .....	72
Runge-Kutta-Verfahren .....	27

**S**

Singularität .....	56
Spezielle Lösung .....	6
stationäre Lösung .....	4
Strömung .....	3
System von DGL .....	1

**T**

Treffzeit .....	42
-----------------	----

**U**

Umlaufzahl .....	63
------------------	----

**V**

variable Koeffizienten .....	6
Variation-der-Konstanten-Formel .....	4, 12
Vernünftige Vorraussetungen .....	3
Verzweigung .....	3
Volterra-Lotka-System .....	1

**W**

Wachstum .....	1
wesentliche Sgt .....	56
Wiederkehrabb .....	42
Wronski-Determinante .....	41

**Z**

zeitabh. Vektorfeld .....	3
Zerfall .....	1
Zweig des Logarithmus .....	71
Zykel .....	64