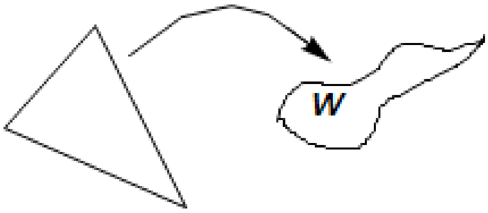
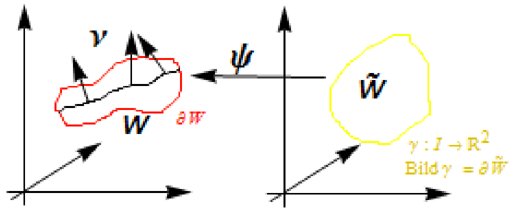
1 Hinweis zu Blatt1 zu Analysis 3

a)

Zu 1), 2) Satz von Stokes: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von W kompakt (2dim C^2-Umft), $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$
Dann ist $\int\limits_W < rot f, \nu > dS = \int\limits_{\partial W} f d\vec{s} = \int\limits_I < f((\psi \circ \gamma)(t)), (\psi \dot{\circ} \gamma)(t) > dt = \int\limits_I < f(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) > dt$

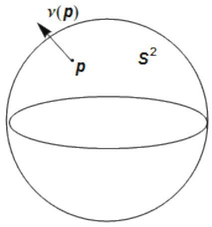




$(\psi : \tilde{w} \to w,\ \tilde{w} \subseteq \mathbb{R}^2,\ \psi$ Parametr.)

Zu 1) zu a):

$\nu : S \to \mathbb{R}^2$ stetig, $\nu(p) \in (T_p S^2)^\perp$, $||\nu(p)||_2 = 1\ \forall p \in S^2$
Es ist $T_p S^2 = p^\perp$, $(T_p S^2)^\perp = (p^\perp)^\perp = span\{p\}$



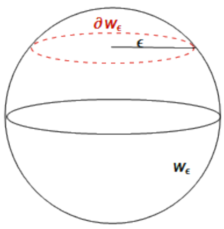
zu b):

$\int\limits_{S^2} < rot v, \nu > dS = 0$

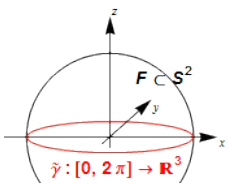
Wende Satz von Stokes auf w_ε (Skizze reicht) und benutze $\int\limits_{\partial w_\varepsilon} v d\vec{s} \xrightarrow{\varepsilon \to 0}$

$\int\limits_{w_\varepsilon} < rot v, \nu > dS \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S^2} < rot v, \nu > dS$

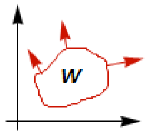
$\int\limits_F < rot v, \nu > dS = \int\limits_I < v(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) > dt$



Zu 2)



Zu 3), 4) Satz von Gauß: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Umgebung von W Würfel (W kompakt, mit „glatten Rand“ [Also alle Vorraussetzungen für Gauß gegeben]: ∂W n-1-dim C^2-Umft)
$f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:
$\int\limits_W div f = \int\limits_{\partial W} < f, \nu > dS$



Bsp.: $w = B(0;1) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \partial w = S^2$

zu 3) $m(t) = m_V(t) = \int\limits_V \varrho(t,x)dx, v \subseteq \mathbb{R}^3$

$\dot{m}(t) = -\int\limits_{\partial V} \varrho(t,x) < v(t,x), \nu > dS \quad \forall V \subseteq \mathbb{R}^3,$

Es Darf benutzt werden: V kompakt, ∂V ist eine 2-dim C^2-Umft.

und: $\dot{m}(t) = \frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho(t,x)dx = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,x)dx$

Außerdem darf benutzt werden: $\int\limits^V f = 0 \forall V$ kompakt, ∂V 2-dim C^2-Umft $\Rightarrow f = 0$

$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $\forall x \in B(x_0;\varepsilon) : f(x) \geq f(x_0)/2$

$\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} f = \int\limits_{U(x_0,\varepsilon)} f > \int\limits_{U(x_0,\varepsilon)} \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$

$\partial B(x_0,\varepsilon) = \varepsilon S^{n-1} + x_0 C^2$-Umft $\Rightarrow Vol(U(x_0,\varepsilon)) > 0$

Allgemeiner:

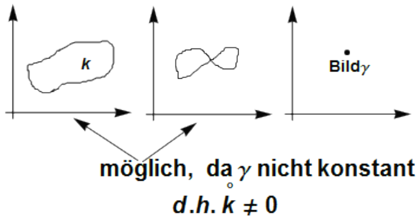
f stetig, $\int\limits_V f = 0 \forall V \subseteq \mathbb{R}^n offen \Rightarrow f = 0$

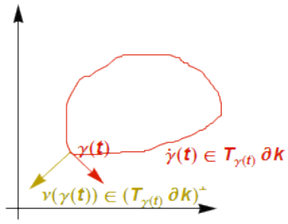
zu 4) O.E. $div(f) > 0$. $\quad$ z.Z.$\dot{x}(t) = f(x(t))$

Nehme an, es gibt $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ und γ periodisch, d.h. das Bild von γ ist geschlossen.

Betrachte dann $\int\limits_k divf = \int\limits_{\partial k} < f, \nu > ds = \int\limits_{\circ k} divf \overset{!}{>} 0 \Rightarrow \exists t \in I$ mit $p = \gamma(t)$

$f(p), p \in \partial k$=Bild γ





zu 5) $\alpha, \beta\gamma\delta \in \mathbb{R}, * \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = \gamma x + \delta y \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma y + \delta y \end{pmatrix} =: f(x,y), f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Gleichheit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$.

Dann ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x(t) := x_0, \ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ y(t) = y_0, \ \binom{x}{y}$ eine Lösung von x.

Bestimme Gleichgewichte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$

Bestimme $\partial f(x_1, y_1), \partial f(x_2, y_2), \ldots$

Bestimme dann Eigenwerte von $J_f(x_1, y_1), J_f(x_2, y_2), \ldots$

$\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0 :$