

# Elektrodynamik

Skript zur Vorlesung von Bunde

Mitgeschrieben und geL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xt von Julian Bergmann

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathematische Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Partielle Ableitung und Vektorprodukt . . . . .	1
1.1.1	Partielle Ableitung . . . . .	1
1.1.2	Vektoroperator . . . . .	1
1.2	Delta-Funktion . . . . .	1
1.2.1	Darstellung der Delta-Funktion in einer Dimension . . . . .	1
1.2.2	Delta-Funktion in 3 Dimensionen . . . . .	2
1.3	Taylorentwicklung skalarer Felder . . . . .	2
1.4	Flächenintegrale . . . . .	3
1.4.1	Volumen- und Linienintegrale . . . . .	3
1.4.2	Flächenintegral . . . . .	3
1.5	Integraldarstellung der Divergenz . . . . .	3
1.6	Integraldarstellung der Rotation . . . . .	4
1.7	Gauß-Satz . . . . .	5
1.8	Stokes-Satz . . . . .	5
1.9	Der Zerlegungssatz . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elektrostatik: Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Coulomb-Gesetz + el. Feld. . . . .	6
2.2	Feldlinien + Äquipotentialflächen . . . . .	7
2.3	Beispiele . . . . .	8
2.4	Multipolentwicklung . . . . .	8
2.5	Elektrostatische Feldenergie . . . . .	9
2.6	Wechselwirkung einer Ladungsverteilung im äußeren Feld . . . . .	10
2.7	Elektrische Feldstärke an Grenzflächen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>12</b>
3.1	Problemstellung . . . . .	12
3.2	Greensfunktion . . . . .	13
3.3	Entwicklung nach orthog. Funktionen . . . . .	15
3.4	Trennung der Variablen . . . . .	16
3.5	Kugelflächenfunktionen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Elektrostatik der Dielektrika</b>	<b>20</b>
4.1	Übersicht . . . . .	20
4.2	Elektrische Polarisierung und dielektrische Verschiebung . . . . .	20
4.3	Randwertprobleme und Dielektrika . . . . .	22
4.4	Elektrostatische Energie . . . . .	22

---

<b>5</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>23</b>
5.1	Elektrischer Stromg . . . . .	23
5.2	Biot-Savart Gesetz . . . . .	24
5.3	Maxwellgleichungen und Vektorpotential . . . . .	25
5.4	Magnetostatisches Moment . . . . .	26
5.5	Magnetostatik in Materie . . . . .	28
5.6	Verhalten an Grenzflächen . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>30</b>
6.1	Faradaysches Induktionsgesetz und Maxwell'sche Ergänzung . . . . .	30
6.2	Elektrodynamische Potentiale . . . . .	32
6.3	Die Energiebilanz . . . . .	33
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>36</b>

# 1 Mathematische Einführung

## 1.1 Partielle Ableitung und Vektorprodukt

### 1.1.1 Partielle Ableitung

$$F(x, y, z) \equiv F(\vec{r})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_1, y_1, z_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - F(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x} \quad (\text{siehe Mechanik 1})$$

ähnlich  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$

Bsp:  $F(\vec{r}) = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{r}$  etc.

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r})\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} A_y(\vec{r})\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x} A_z(\vec{r})\vec{e}_z$$

### 1.1.2 Vektoroperator

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

a) **Gradient:**  $\vec{\nabla} V(x, y, z) = \vec{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z} = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$

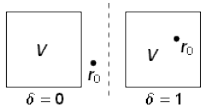
b) **Divergenz:**  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

c) **Rotation:**  $\vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z)$

Wichtige Rechenregeln:

- 1)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$
- 2)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) = 0$ , wenn  $\vec{a}$  konst
- 3)  $\vec{\nabla} \times (\varphi(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A}$
- 4)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0$
- 5)  $\vec{\nabla} \times f(\vec{r})\vec{r} = 0$
- 6)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad \Delta = \nabla^2$

## 1.2 Delta-Funktion



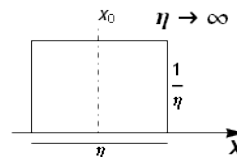
Dichte von Punktladungen:  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$  für  $r \neq r_0$ ,  $\int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{r}_0 \text{ in } V \\ 0 & \text{falls } \vec{r}_0 \text{ nicht in } V \end{cases}$

$\rho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ . offensichtlich:  $\delta - F$  beliebig schmal und beliebig hoch.

### 1.2.1 Darstellung der Delta-Funktion in einer Dimension

Einfachste Darstellung in d=1:

Betr.  $L_\eta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \infty$  (Breite der **Lorenzkurve**  $\eta, \eta \rightarrow 0$ )

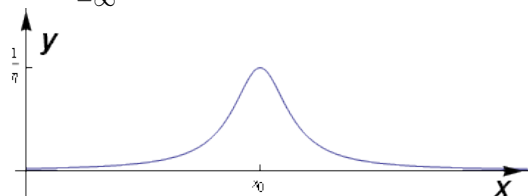


$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} [\arctan(\frac{\beta - x_0}{\eta}) - \arctan(\frac{\alpha - x_0}{\eta})] = \begin{cases} 1 & , \alpha < x_0 < \beta \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(genauso Gaußkurve)

Sehr wichtige andere Darstellung:  $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x - x_0)} dk$

(**Fouriertransformierte** etc.)



Die  $\delta - F'$  hat folgende weitere Eigenschaft:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$   
 (kann man auch als Def. d.  $\delta - F'$  benutzen)

**Beweis**

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} L_{\eta}(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} L_{\eta}(x - x_0) dx = f(x_0)$$

□

Wichtige Eigenschaft (Beweis in Übung):

- 1)  $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ ,  $x_i$ : einfache Nullstelle,  $\sum_i$ : über Nullstellen,  $g(x_i) = 0$ ,  $g'(x_i) \neq 0$   
 $\delta(x/a) = |a| \delta(x)$
- 2)  $\int_{\alpha}^{\beta} \delta'(x - x_0) f(x) dx = f'(x_0)$ ,  $\alpha < x_0 < \beta$

**1.2.2 Delta-Funktion in 3 Dimensionen**

**Kartesische Koordinaten:**

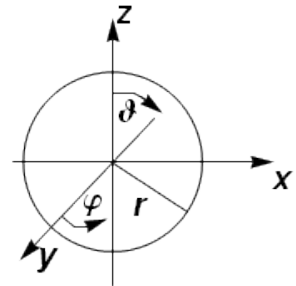
$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \int = \int_V \int_V \int_V dx dy dz \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &:= \gamma(x, y, z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ \Rightarrow \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= 1 = \int_V \int_V \int_V dx dy dz \gamma(x, y, z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \gamma(x, y, z) \int_V dx dy dz \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \gamma(x, y, z) \int dx \delta(x - x_0) \int dy \delta(y - y_0) \int dz \delta(z - z_0) = \gamma(x, y, z) = 1 \\ \Rightarrow \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \end{aligned}$$

**Kugelkoordinaten**

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\vartheta) \\ \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \frac{1}{r_0^2 \sin(\vartheta_0)} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \\ \int_V d^3r &= \int_V \int_V \int_V r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

**Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) \\ \int_V d^3r &= \int_V \int_V \int_V \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

**1.3 Taylorentwicklung skalarer Felder**

$\varphi(\vec{r})$  beliebig oft diffbar,  $\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r})$  ?

$$d = 1 : \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n; \quad \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$$

$$\text{Trick: } F(t) = \varphi(\underbrace{x_1 + \Delta x_1}_{u_1}, \underbrace{x_2 + \Delta x_2}_{u_2}, \underbrace{x_3 + \Delta x_3}_{u_3})$$

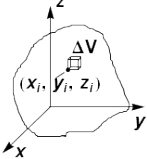
$$\text{Jetzt: } F(t) \text{ um } t=0 \text{ entwickeln: } \frac{dF}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \underbrace{\frac{du_1}{dt}}_{\Delta x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \underbrace{\frac{du_2}{dt}}_{\Delta x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \underbrace{\frac{du_3}{dt}}_{\Delta x_3}$$

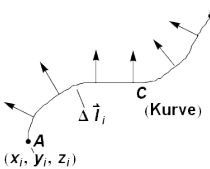
$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dt^2} &= \Delta x_1 \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \Delta x_3 \right) \\ &\quad + \Delta x_2 \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \Delta x_3 \right) \\ &\quad + \Delta x_3 \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \Delta x_3 \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \varphi \stackrel{!}{=} \left( \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right)^2 \varphi(u_1, u_2, u_3) \\ \text{Allgemein: } \frac{d^n F}{dt^n} &= \left( \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right)^n \varphi(u_1, u_2, u_3) \Rightarrow \frac{d^n F}{dt^n} \Big|_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ \Rightarrow F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) t^n = F(1) \equiv \varphi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\Delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla}} \right)^n}_{e^{\Delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla}}} \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Bsp:  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$  um  $r = 0$  nach kleinen  $\vec{r}$  entwickeln.  
 wichtige Hilfsformel:  $\vec{\nabla} \frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0|)^n} = -n \frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0|)^{n+1}} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$   
 $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0^3} \vec{r} \cdot \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{r_0^5} (3(\vec{r}\vec{r}_0)^2 - r^2 r_0^2) + \dots$

### 1.4 Flächenintegrale

#### 1.4.1 Volumen- und Linienintegrale

a)  In  $V : f(x, y, z) \Rightarrow \iiint_V dx dy dz f(x, y, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\Delta V_i}_{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i} f(x_i, y_i, z_i)$   
 (*Volumenintegral*)

b)   $\int_A^B d\vec{l} \vec{E}(x, y, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta \vec{l} \vec{E}(x_i, y_i, z_i)$   
 (*Kurven-/Linienintegral*)

#### 1.4.2 Flächenintegral

Gegeben:  $\vec{E}(\vec{r}) = (E_x(\vec{r}), E_y(\vec{r}), E_z(\vec{r}))$  und Volumen V mit *geschlossener Oberfläche*  $S(V)$ . Zerlege  $S(V)$  in N einzelne *Flächenelemente*  $\Delta f_i$  und definiere Vektor  $\Delta \vec{f}_i = \Delta f_i \cdot \vec{n}(\vec{r}_i)$  (n: Nach außen gerichteter *Normalenvektor* bei  $\vec{r}_i$ ).

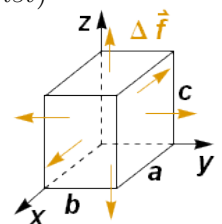
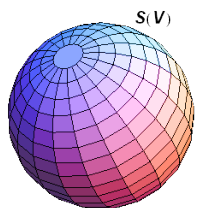
$$I_{S,N} = \sum_{i=1}^N \vec{E}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{f}_i (N \rightarrow \infty \Rightarrow I_S)$$

$I_S$ : Fluss von  $\vec{E}(\vec{r})$  durch S. Gilt auch für *nicht-geschlossene Flächen*. Anwendung: E-Statik.

Bsp: Fluss eines homogenen Feldes durch Quader. ( $\vec{E}(E_x, E_y, E_z) = const$ )

$$\oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = -abE_z + abE_z - acE_y + acE_y - bcE_x + bcE_x = 0$$

Leicht verallgemeinerbar auf beliebige geschl. Flächen.

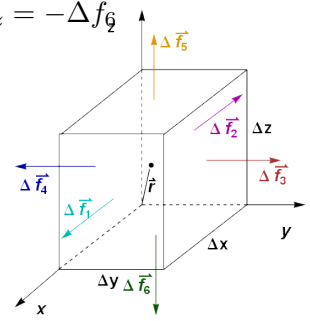


### 1.5 Integraldarstellung der Divergenz

Betr: kleines Volumenelement  $\Delta V$  um  $\vec{r}_0$

Beh:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f}$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{f}_1 &= \Delta y \Delta z \vec{e}_x = -\Delta \vec{f}_2, \quad \Delta \vec{f}_3 = \Delta x \Delta z \vec{e}_y = -\Delta \vec{f}_4, \quad \Delta \vec{f}_5 = \Delta x \Delta y \vec{e}_z = -\Delta \vec{f}_6 \\ \Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} &= \int \int dy dz \underbrace{\left( E_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - E_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \right)}_{\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z) \Delta x + O((\Delta x)^3)} \\ &+ \int \int dx dz \underbrace{\left( E_y(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z) - E_y(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z) \right)}_{\frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y_0, z) \Delta y + O((\Delta y)^3)} \\ &+ \int \int dx dy \underbrace{\left( E_z(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2}) - E_z(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) \right)}_{\frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z_0) \Delta z + O((\Delta z)^3)} \end{aligned}$$



Jetzt:  $\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0, z \rightarrow z_0$

$$\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \Delta x \Delta y \Delta z \underbrace{\left( \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} (*)$$

- a)  $\vec{E} = const$  im Bereich von  $\Delta V \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
- b)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  beschreibt „Quelle“ des Feldes,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  ist maximal wenn  $\vec{E}$  überall  $\parallel d\vec{f}$  ist.
- c) Folgerung:  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{a} \varphi(\vec{r})$ ,  $a$ : const aber beliebig.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \varphi(\vec{r})) = \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{a})}_{0} \varphi(\vec{r}) + \vec{a} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \varphi}_{grad} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \vec{a} \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \varphi$$

Da  $\vec{a}$  beliebig  $\Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \varphi$

(Integraldarstellung des Gradienten)

### 1.6 Integraldarstellung der Rotation

Def. Zirkulation:  $I_C = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ,  $I_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i$

„Maß für Wirbelstärke“

Gesucht: Zusammenhang mit  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  Betrachtet: Folge von geschlossenen ebenen Kurven  $C_n$

a) Ebene x-y:  $I_{C_n} = \int_{C_u} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x_n}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x_n}{2}} dx \underbrace{\left( A_x(x, y_0 - \frac{\Delta y_n}{2}) - A_x(x, y_0 + \frac{\Delta y_n}{2}) \right)}_{-\frac{\partial A_x}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y_n + O((\Delta y_n)^3)}$

$$+ \int_{y_0 - \frac{\Delta y_n}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y_n}{2}} dy \underbrace{\left( A_y(x_0 - \frac{\Delta x_n}{2}, y) - A_y(x_0 + \frac{\Delta x_n}{2}, y) \right)}_{-\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x_n + O((\Delta x_n)^3)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\Delta x_n \Delta y_n}_{F_{n,z}} \underbrace{\left( -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)}_{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z}$$

leicht verallgemeinerbar auf x-z-Fläche  $(F_{n,y}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y)$  und y-z-Fläche  $(F_{n,x}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{F_C \rightarrow 0} \frac{1}{F_C} \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

(Integraldarstellung der Rotation)

Rotation: Flächendichte der Zirkulation

### 1.7 Gauß-Satz

$$\oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} = \Delta V \vec{\nabla} E, \quad \text{Betrachtet: 2 benachbarte Volumina } \Delta V_i, \Delta V_{i+1}$$

$$\oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} \stackrel{!!!}{=} \oint_{S(\Delta V_i)} \vec{E} d\vec{f} + \oint_{S(\Delta V_{i+1})} \vec{E} d\vec{f} = \Delta V_i \vec{\nabla} \vec{E}|_{\vec{r}_i} + \Delta V_{i+1} \vec{\nabla} \vec{E}|_{\vec{r}_{i+1}}$$

Allgemeine makroskopische Volumen aufteilen in n Volumina  $\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \vec{\nabla} \vec{E}|_{\vec{r}_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$$\oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \vec{E}$$

Triviale Anwendung des **Gauß-Satzes** (**Greenschen Identitäten**)

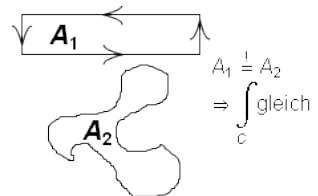
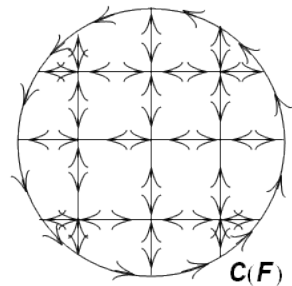
1)  $\vec{E} = \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}), RS : \vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} \psi + \varphi \underbrace{\vec{\nabla}^2}_{\Delta} \psi,$

LS:  $\oint_{S(V)} \varphi(\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}) d\vec{f} (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \psi}{\partial n} : \text{Normalableitung von } \psi \text{ auf } S)$

$$\Rightarrow \int_V [\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} \psi + \varphi \Delta \psi] dV = \oint_{S(V)} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\vec{f}$$

2) In  $\vec{E}$   $\varphi, \psi$  vertausche; Beide Ergebnisse subtrahieren

$$(1) \Rightarrow \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_{S(V)} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) d\vec{f}$$



### 1.8 Stokes-Satz

Zirkulation  $\Leftrightarrow$  Flächenintegrale

$$\int_{C_i} \vec{A} d\vec{r} = \Delta F_i (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_i)) \vec{n} \quad (\text{ganz kleine Flächen})$$

$$\int_C = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} = \sum_{i=1}^N \Delta F_i \vec{n} (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_i)) = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{f}$$

Also:  $\oint_{C(F)} \vec{A} d\vec{r} = \int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f}$  (Stokes-Satz)

**Zirkulation  $\leftrightarrow$  Rotation**

Folgerungen:

$$\vec{\nabla} \vec{A} = 0 \Rightarrow \oint_{C(F)} \vec{A} d\vec{r} = 0 \forall \text{ Kurven } C = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} d\vec{r} \text{ unabh. vom Weg}$$

$\Rightarrow$  Potentialbestimmung (siehe Mech. 1)

#### Beispiel zu Folgerung zu 1.8

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}, \quad \vec{B} = \text{const}$$

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = -\frac{1}{2} (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{B} (\vec{\nabla} \vec{r})$$

$$= -\frac{1}{2} (B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z})(x, y, z) + \frac{1}{2} (B_x, B_y, B_z) \cdot 3$$

$$= -\frac{1}{2} B_x (1, 0, 0) - \frac{1}{2} B_y (0, 1, 0) - \frac{1}{2} B_z (0, 0, 1) + \frac{3}{2} (B_x, B_y, B_z) = (B_x, B_y, B_z) = \vec{B}$$

$$\Rightarrow \int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \int_F \vec{B} d\vec{f} = \vec{B} \vec{F} = \oint_{C(F)} \vec{A} d\vec{r} \quad (\text{ebene Fläche})$$

Dies hängt nur ab von Größe d. Fläche und ist unabh. von der Form d. Fläche.

### 1.9 Der Zerlegungssatz

Jedes  $\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$  lässt sich schreiben als  $\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{A}_l(\vec{r})}_{\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0} + \underbrace{\vec{A}_t(\vec{r})}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_t = 0}$

Mit  $\vec{A}_l(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \alpha(\vec{r})$  ( $\alpha$ : **Potential**)

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

d.h. wirbelfreier Anteil bestimmt durch  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  (**Elektrostatik**)

$\vec{A}_t(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\beta}(\vec{r})$  ( $\vec{\beta}$ : **Vektorpotential**)

$$\vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

d.h. quellfreier Anteil beschrieben durch  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  (**Magnetostatik**)

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{A}, \quad f \frac{d}{dx} g = \frac{d}{dx} (fg) - g \frac{d}{dx} f$$

- 1)  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \alpha(\vec{r})$
- 2)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\beta}(\vec{r})$
- 3) i.A.:  $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{\beta}(\vec{r})$

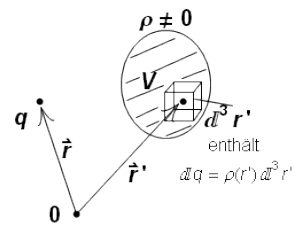
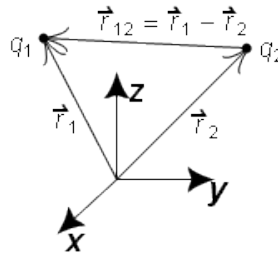
$\vec{\nabla} \cdot \Rightarrow \Delta \alpha(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Leftarrow$  **Quellen**

$\vec{\nabla} \times \Rightarrow \Delta \vec{\beta}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{A} \Leftarrow$  **Wirbel**

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\beta})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta}) - \Delta \vec{\beta}$$

## 2 Elektrostatik: Grundlagen

### 2.1 Coulomb-Gesetz + el. Feld.



Punktladung  $q_1, q_2$

exp.:  $\vec{K}_{12} = k \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} q_1 q_2 = -\vec{K}_{21}$  (Kraft von Ladung 2 auf Ladung 1)

Viele Ladungen  $q_1, \dots, q_n$ : Die von  $q_2, \dots, q_n$  auf  $q_1$  ausgeübten Kräfte addieren sich vektoriell: **Superpositionsprinzip**

$$\vec{K}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^N q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}$$

Festlegung der Konstanten K im Volumen:

- a)  $K=1$  (cm,gs)  $\rightarrow [q]=\text{cm}(dym)^{1/2}$
- b) MKSA, (M:Meter, K:Kilogramm, S: Sekunde, A: Ampere)  
 $N = \frac{1}{M^2} [q]^2, ([q]=1 \text{ Coulomb}=1AS, N:\text{Newton})$

**Definition:**

Das el. Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  wird durch eine vorgegebene **Ladungskonfiguration** erzeugt und ist durch die Kraft auf eine (beliebig kleine) Testladung  $q$  definiert.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_q}{q}$$

N Punktladungen:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}'_j}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|^3}$ , MKSA-System

Oft: Ladung kontinuierlich in geg. Volumen  $V'$  verteilt und Dichte  $\rho(\vec{r})$



$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{-\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

**Zerlegungssatz:**  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_l(\vec{r}) + \vec{A}_t(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{A}_l(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\alpha(\vec{r}), \alpha = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \stackrel{!!}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \varphi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Maxwell-Gl der Elektrostatik in differentieller Form.

$$\Delta\varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Poisson-Gl.)}$$

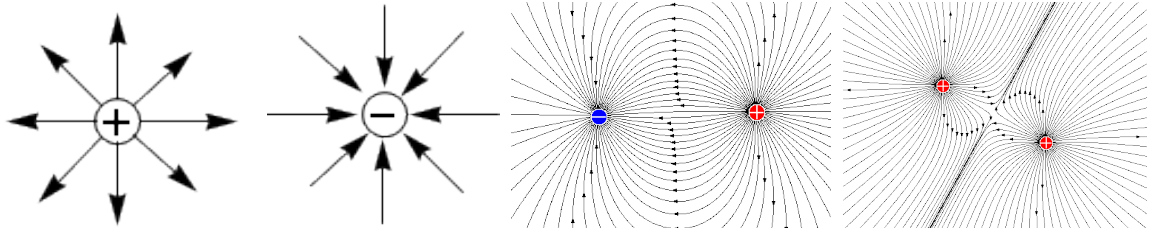
Entsprechende Integralform:  $\int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{f} = \frac{q(\vec{r})}{\epsilon_0}$  für jedes (!!!) Volumen

Stokes:  $\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$  (**Maxwell in Integralform**)

## 2.2 Feldlinien + Äquipotentialflächen

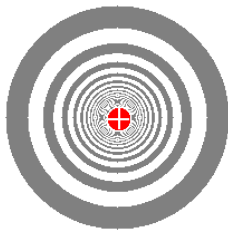
**a) Feldlinien:** Bahnen auf denen sich ein positiv geladener Körper aufgrund der Coulomb-Kraft Fortbewegen würde.

Aus der Definition folgt: Feldlinien schneiden sich nicht, d.h. es gibt keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik



**b) Äquipotentialflächen:** "Höhenlinien",  $\varphi(\vec{r}) = konst$ ,  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi$

Nach Mech.1: Feldlinien  $\perp$  Äquipotentialflächen



### 2.3 Beispiele

#### Beispiel zu zu 2.2

1) N Punktladungen:  $\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$

2) Homogen geladene Kugel:  $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & , |\vec{r}'| < R \\ 0 & , |\vec{r}'| > R \end{cases}$

1. Möglichkeit:  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K d^3r' \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  (siehe Übung)

2. Möglichkeit:  $\oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$

Kugelsymmetrie: nur  $|\vec{r}'|$ -Abh.:  $\vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow E(r)\vec{e}_r$

LS:  $\oint_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \oint_{S(V)} E_r df \stackrel{!}{=} E_r 4\pi r^2$

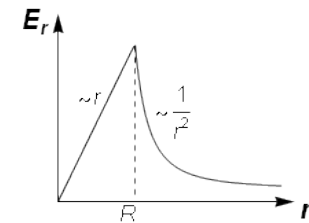
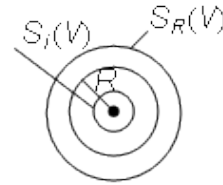
RS:  $\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_r} \rho dV = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 & , r < R \\ 0 & , r > R \end{cases}$

$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \begin{cases} \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 & , r < R \\ 0 & , r > R \end{cases}$

mit  $\frac{\rho_0 4\pi}{3} R^3 = Q, \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$

$\varphi(r) = ? , E_r(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$

$\Rightarrow \varphi(r) = -\int_{\infty}^r E_r(\vec{r}') dr'$



### 2.4 Multipolentwicklung

$R_{max}$ : maximale Ausdehnung der Ladungsverteilung.

(\*)  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, r > R_{max} (>>)$

In **Fernzone** gesucht:  $\varphi(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})$

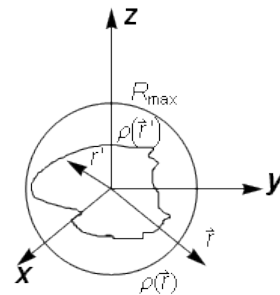
$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{!}{=} \frac{1}{r} \frac{1}{|\vec{r}/r - \vec{r}'/r|} \stackrel{!}{=} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{rr} + \frac{1}{2} \left( 3\left(\frac{\vec{r}\vec{r}'}{rr}\right)^2 - \frac{r'^2}{r} \right) + \dots \right)$

$\sum_{i,j=1}^3 x_j x_i r'^2 \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 r'^2 = r'^2 r'^2$

$\dots \Rightarrow \left[ \frac{1}{r^4} \sum_{i,j=1}^3 (3(x'_i x'_i)(x'_j x'_j) - x_i'^2 x_j'^2) \right]$

$= \frac{1}{r^4} \sum_{i,j} x_i x_j (3x'_j x'_i - r'^2 \delta_{ij}) \Rightarrow \varphi(\vec{r})$

$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \\ + \frac{1}{r^2} \left( \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \right) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\ + \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{r^2} \left( \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \right) \end{cases}$



Monopol/Gesamtladung  
(Feld einer Pktladung)

(...) : Dipolmoment  $\vec{P}$  (Feld eines Dipols)

f: Quadropolmoment  $Q_{ij}$ ,  
Rest: Feld eines Quadropols

**Beispiel zu Multipolentwicklung**

Dipol:

$$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \vec{a}) - q\delta(\vec{r}' - \vec{b}),$$

$$\vec{p} = q \int d^3r' r' (\delta(\vec{r}' - \vec{a}) - \delta(\vec{r}' - \vec{b})) = q\vec{a}$$

$$\text{math., Dipol: } \left. \begin{array}{l} a \rightarrow 0 \\ a \rightarrow \infty \end{array} \right\} \vec{P} \text{ konst} \Rightarrow \text{höhere Terme in der Entw.} = 0$$

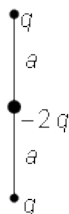
Im Allgemeinen:

$$\text{a) } \rho(\vec{r}') = \rho(-\vec{r}') \Rightarrow \vec{P} = 0$$

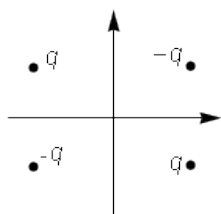
$$\text{b) } \rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}') \Rightarrow q = 0$$

$$\text{c) } \rho(\vec{r}') = \rho(|\vec{r}'|) \Rightarrow Q_{ij} = 0$$

Beispiel1



Beispiel2

**2.5 Elektrostatische Feldenergie**

**Mechanik** Die Energie einer auf einen endl. Raumbereich beschränkten Ladungskonfiguration entspricht der Arbeit, die benötigt wird, um die Ladung aus  $\infty$  zu dieser Konfiguration zusammen zu bringen.

$$\text{Eine Punktladung } A \rightarrow B : W_{AB} = - \int_A^B \vec{K} d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = q \underbrace{(\varphi(B) - \varphi(A))}_{=:U}$$

Ladung  $q_1$  ( $q_2, q_3$  noch nicht da):  $W_1=0$ ,

$$2. \text{ Ladung (sieht nur } \varphi(A)): W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|},$$

$$3. \text{ Ladung (sieht } q_1, q_2): W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_j|},$$

$$\Rightarrow W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_N = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Jetzt kontinuierliche Ladungsverteilung:

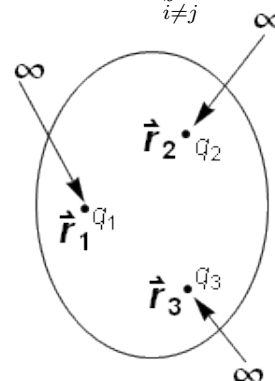
$$\rho(\vec{r}') \text{ sei stetig: } \sum q_i \dots \rightarrow \int d^3r' \rho(\vec{r}') \dots$$

$$\text{Also: } W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = s(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi \epsilon_0$$

$$\Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi)) \varphi \stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \varphi - \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\oint_{S(V)} d\vec{f} (\varphi \vec{\nabla} \varphi)}_{V \rightarrow \infty} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$$



$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla}\varphi \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \varphi \vec{\nabla}\varphi \sim \frac{1}{r^3}, \quad \int \sim 4\pi r^2$$

$$\oint_{S(V)} \sim \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^3} \sim \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$$

**Energiedichte:**  $\omega := \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2, \quad W = \int d^3r \omega(\vec{r})$

### 2.6 Wechselwirkung einer Ladungsverteilung im äußeren Feld

Gesucht: **Wechselwirkungsenergie**  
 Gegeben: **Externe Ladungsverteilung**  $\rho_{ext}$  erzeugt äußeres E-Feld, das mit  $\rho(\vec{r})$  wechselwirkt.

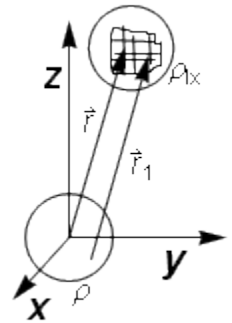
$$\rho\rho + \rho\rho_{ext} + \rho_{ext}\rho + \rho_{ext}\rho_{ext}$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho_{ext}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\text{Wechselwirkungsenergie})$$

$$\Rightarrow W_1 = \int d^3r \rho(\vec{r})\varphi_{ext}(\vec{r})$$

$$\varphi_{ext}(\vec{r}) = \varphi_{ext}(0) + (\vec{r}\vec{\nabla})\varphi_{ext}|_{\vec{r}=0} + \dots + \varphi_{ext}(0) - \vec{r}\vec{E}_{ext}(0)$$

$$\Rightarrow W_1 = q\varphi_{ext}(0) - \vec{p}\vec{E}_{ext}(0)$$

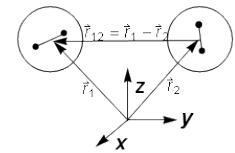


Spezialfall: **Wechselwirkungsenergie** zu 2 Dipolen:

Allgemein: **Dipolfeld**  $\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \vec{r}\vec{p}$

Üb:  $\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}]$

$$W_1 = W_{12} = W_{21} = -\vec{p}_2\vec{E}_D(\vec{r}_{12}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\vec{r}_{12}\vec{p}_1)(\vec{r}_{21}\vec{p}_2)}{r_{12}^5}]$$



### 2.7 Elektrische Feldstärke an Grenzflächen

Gesucht: Zusammenhang zu  $\vec{E}_1(\vec{r})$  und  $\vec{E}_2(\vec{r})$  bei **Grenzfläche**

a) Gauß-Satz:

$$\int_{\Delta V} d^3r \vec{\nabla}r = \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F \vec{n}_{12} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta F$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{12} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

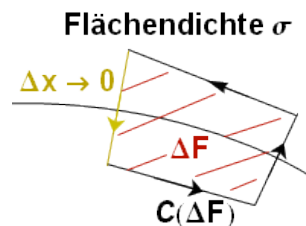
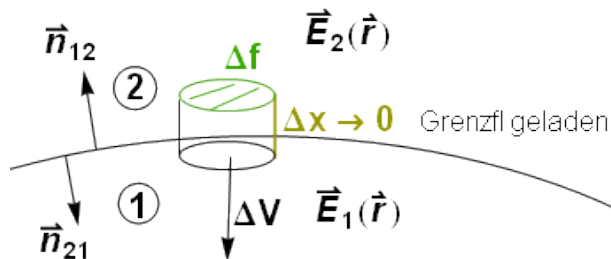
$\vec{E}$  normal stetig, falls  $\sigma = 0$

b) Stokes-Satz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_{\Delta F} d\vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \oint_{S(\Delta V)} dr \vec{E} = \int_{\Delta F} dt (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \stackrel{!}{=} 0$$

$\vec{t}$ : Tangentialvektor

d.h.  $\vec{E}$  **tangential stetig**.



## Beispiel zu Grenzflächen

a)  $\infty$  *ausgedehnte geladene Ebene*:

$$\sigma = \frac{Q}{F} > 0, \quad \vec{E} = (0, 0, E_z), \quad E_{1z} = -E_{2z}$$

$$\Rightarrow 2E_{2z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow e_{2z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

b) *Plattenkondensator*:

$$\sigma(z=0) = \pm \frac{Q}{F} > 0, \quad \sigma(z=d) = -\frac{Q}{F} < 0$$

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z - d/|z-d| \vec{e}_z, \quad \vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & , 0 < z < d \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z & , 0 < z < d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} d & , z \geq d \end{cases}$$

 $\varphi$  stetig bei  $z=0, d$ 

$$\text{Spannung: } \varphi(0) - \varphi(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 F} d = \frac{Q}{C}$$

C: *Kapazität*

$$\text{Energiedichte: } \omega(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow W = \int d^3r \omega = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} F d$$

b) Zylinderkoordinaten

 $h \gg R_2$  (Vermeidung von *Randeffekten*) *Achsialsymmetrie*

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(s) \vec{e}_s, \quad x = \rho \cos(\varphi), \quad y = s, \quad z = z$$

$$\int \vec{E} d\vec{f} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{z_\rho} d^3r' \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} 0 & , \rho < R_1 \\ Q & , R_1 < \rho < R_2 = E_\rho \rho 2\pi h \\ 0 & , \rho > R_2 \end{cases}$$

$$d\vec{f} = \rho d\varphi dz \vec{e}_z$$

$$E(\rho) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{\rho} \text{ f\u00fcr } \rho_1 < \rho < \rho_2$$

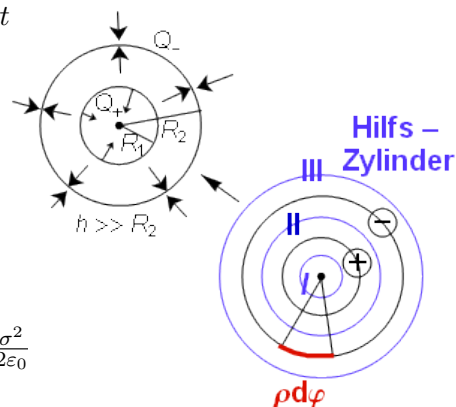
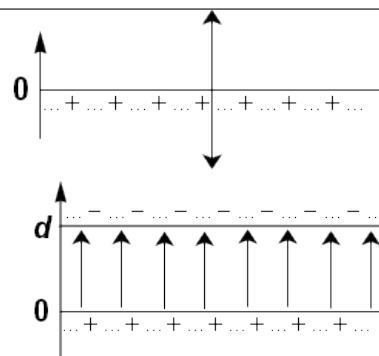
$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \begin{cases} \text{const}_1 \\ \ln(\rho) - \text{const}_2 \\ \text{const}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Spannung } U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{C}$$

$$\text{Energiedichte: } \omega(\vec{r}) = \frac{R^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} & , R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \int_z \rho d\rho d\varphi dz \omega(s) = 2\pi h \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2} \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} d\rho \frac{1}{\rho}}_{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} C U^2$$



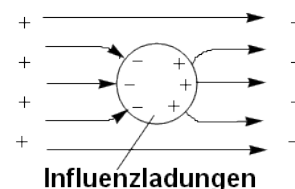
### 3 Randwertprobleme

#### 3.1 Problemstellung

Ohne spezielle Randbedingungen: Ladung  $\rho(\vec{r})$

$$\Delta\varphi = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

In vielen Fällen: Ladungen + Leiter



#### Beispiel zu Randwertproblemen

Trennung + und - Ladungen, die so ist, dass im Inneren der Kugel  $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i = 0$

Auf Kugel:  $\varphi = const$  (-Q, falls Kugel geordnet)

Begründung: Solange das Innere eines Leiters noch nicht feldfrei ist, wirkt auf jede Ladung q im Leiter eine Kraft  $q\vec{E}$ .

Da die Ladungen im Leiter dieser Kraft folgen können, werden sie ihre Position so lange verändern, bis keine Kraft mehr auf sie wirkt., d.h. bis das Innere des Leiters feldfrei ist. Gleichnamige Ladungen entfernen sich möglichst weit voneinander  $\Rightarrow$  Ansammlung am Rand des Leiters.

Äußeres Feld  $\vec{E}_a$ , Gegenfeld  $\vec{E}_i$ : durch influenzierte Ladungen  $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i$ , sodass  $\vec{E} = 0$  im inneren  $\Rightarrow \varphi = const$

$$\Rightarrow E_{innen}^{(n)} = E_{innen}^{(t)} = 0 \Rightarrow E_{au\ss en}^{(t)} = 0$$

$$E_{au\ss en}^{(n)} = E_{innen}^{(n)} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\sigma$ : *influenzierte Flächenladungsdichte*

Problemstellung:

Geg:  $\varphi(\vec{r}')$  in V und  $\varphi$  oder  $\frac{d\varphi}{dn} = -\vec{E}_n$  auf gewissen Randflächen oder Grenzflächen

Gesucht:  $\varphi(\vec{r}')$  in allen Punkten des uns interessierenden Volumens  
2 mögl. *Randbedingungen*:

1)  $\varphi$  auf s vorgegeben: *Dirichlet-Randbedingung*

1)  $\frac{d\varphi}{n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  auf s vorgegeben *von-Neumann-Randbedingung*

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad \varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) \text{ auf s (oder } \sigma \text{ auf s)}$$

Behauptung: Lösung pp ist eindeutig.

#### Beweis

Annahme:  $\varphi_1(\vec{r}), \varphi_2(\vec{r})$  seien beides Lösungen der Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta\varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{mit } \varphi_1 \neq \varphi_2 \text{ auf } S(V)$$

z.Z.:  $\varphi = \varphi_2$

$$1. \text{ Greenscher Satz } (\varphi = t) : \int d^3r (t\Delta t + (\vec{\nabla}\psi)^2) = \oint_{S(V)} \frac{d\psi}{dn} d\vec{f} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 dr = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi = const = 0 \text{ auf Oberfläche } S(V) \Rightarrow \psi = 0$$

□

### 3.2 Greensfunktion

Lösung mit Grenzfunktion

Dirichlet-Randbedingung:  $\varphi = \text{const}$  auf  $S(V)$ ,

Def:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Poisson-Gl. für Punktladun.

Behauptung:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f(\vec{r}, \vec{r}')$  und  $\Delta f = 0$

**Beweis**

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')} + \underbrace{\Delta_r f(\vec{r}, \vec{r}')}_{=0}$$

(OK, siehe Zerlegungssatz) □

Betr.  $\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + f(\vec{r}, \vec{r}')$ ,  $\Delta_r f = 0$

$r \leftrightarrow r' : \Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}' - \vec{r})$

Gesucht:  $\varphi(\vec{r})$  bei vorgeg. Randbed. auf  $S(V)$  Betr. 2. Greensche Identität:  $\varphi, \psi = G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\int_V d^3r' [\varphi(\vec{r}') \underbrace{\Delta_{r'} G(\vec{r}', \vec{r})}_{\psi(\vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}', \vec{r}) \Delta_{r'} \varphi(\vec{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}')} ] = \int_{S(V)} df' [\underbrace{\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}}_{\psi} - \underbrace{G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'}}_{\psi}]$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}', \vec{r}) \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \int_{S(V)} df' [\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'}]$$

RB:  $\varphi(\vec{r}')$  auf  $S(V)$

Jetzt: Wähle  $f(\vec{r}', \vec{r})$  so, dass  $G(\vec{r}', \vec{r})$  für  $\vec{r}' \in S(V)$  verschwindet

$G(\vec{r}', \vec{r}) = 0, r' \in S(V)$

d.h.  $f(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \vec{r}' \in S(V)$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) - \epsilon_0 \int_{S(V)} df' \underbrace{\varphi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}}_{\text{bekannt}}$$

Grenzfläche geerdet:  $\varphi = 0$  auf Grenzfläche

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r})$$

Anwendungsbeispiel:

Gesucht:  $G$

Folge allg. Beschreibung,  $z' = 0$ : Grenzfläche

$$f(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z'^2}}$$

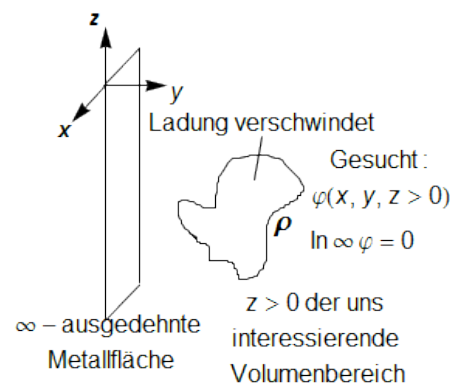
Gesucht:  $f(\vec{r}', \vec{r})$  das  $\Delta_{r'} f(\vec{r}', \vec{r}) = 0$  erfüllt.

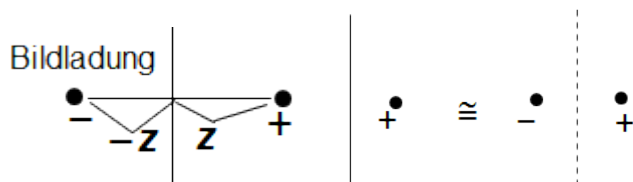
Bekannt:  $\underbrace{\frac{1}{-4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}}_{\text{erfüllt Poissongl. } \Delta f = 0}$  und erfüllt RB

Aus Eindeutigkeit  $\Rightarrow$  Lösung

$$\text{Zusammenfassung: } \Rightarrow G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'+z)^2}} \right\}$$

Pot. 2er Punktladungen, eine am Ort  $x, y, z$





Allg. Lösung:  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \left\{ \frac{1}{\sqrt{\dots}} - \frac{1}{\sqrt{\dots(z+z')^2}} \right\}$

### Methoden der Bildladungen:

Man bringt außerhalb von  $V$  an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen fiktive Ladungen („*Bildladungen*“) an, durch welche die erforderlichen *Randbedingungen* auf  $S(V)$  erfüllt werden.

### Beispiel zu Punktladungen über geerdete $\infty$ -Metallplatte

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{r}_0|} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x,y,z-z_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{(x,y,z+z_0)}{|\vec{r}+\vec{r}_0|^3} \right]$$

$$z=0: \vec{E}(x,y,z=0) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \vec{e}_r \quad (\text{wie erwartet } \perp \text{ auf Metallfl.})$$

*Influenzierte Ladungsdichte:*  $\sigma \equiv \frac{\partial q}{\partial n} = \epsilon_0 E(x,y,z=0)$

Gesamte *influenzierte Flächenladung:*  $\bar{q} = -q$

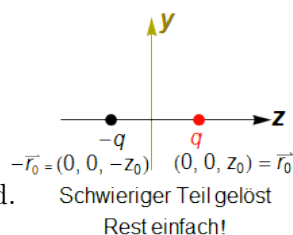
### Beweis

$$\bar{q} = \int_{z=0} \sigma df = -\frac{qz_0}{2\pi} \int_{z=0} df \frac{1}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$$

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad df = r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \bar{q} = -\frac{q}{2\pi} 2\pi z_0 \int_0^\infty dr r \frac{1}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = -q$$

$$-\frac{d}{dr} \frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}$$



*Bildkraft:* Kraft die auf Ladung  $q$  ausgeübt wird.

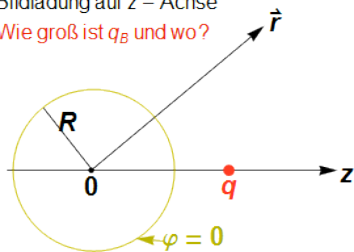
Schwieriger Teil gelöst  
Rest einfach!

### Beispiel zu Punktladung über geerdeter Metallkugel

1. Symmetrie betrachten!

Bildladung auf  $z$ -Achse

Wie groß ist  $q_B$  und wo?





### 3.3 Entwicklung nach orthog. Funktionen

$U_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , reell oder komplex

quadratintegrierbar auf relevanten Intervall  $a \leq x \leq b = [a, b]$

Orthonormal:  $\int_a^b dx U_n^*(x) U_m(x) = \delta_{nm}$

$f(x)$  quadratintegrierbar

Entwicklung:  $f_N(x)$  quadratintegrierbar Entwicklung:  $f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(x)$  optio-

nal:  $c_n$ , so dass  $\int_a^b dx |f(x) - f_N(x)|^2 = \text{Min}$  Einsetzen:  $\int_a^b dx |f(x) - f_N(x)|^2 =$

$$\left[ \int_a^b dx f^*(x) f(x) - \sum_{n=1}^N c_n^* \int_a^b dx U_n^*(x) f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b dx U_n(x) f^*(x) + \sum_{n=1}^N c_n^* c_n \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Min} : \frac{\partial}{\partial c_l} [ ] &= - \int_a^b dx U_l(x) f^*(x) + c_l^* \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial}{\partial c_l^*} [ ] &= - \int_a^b dx U_l^*(x) f(x) + c_l \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} * : c_l = \int_a^b dx U_l^*(x) f(x) \text{ beste Wahl!}$$

Das System  $\{U_n(x)\}$  heißt **vollständig**, falls  $f_N(x)$  im Mittel gegen  $f(x)$  konvergiert.

$$\left( \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_N(x)|^2 = 0 \right)$$

$$\Rightarrow ** : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$$

Bedingung dafür  $[(*) \text{ in } (**)] : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b dy f(y) U_n^*(y) \right\} U_n(x)$

LS=RS, falls:  $f(x) = \int_a^b dy f(y) \delta(x - y)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n^*(y) = \delta(x - y)}$$

#### Beispiel zu Fourier-Reihe

Intervall  $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$

$$U_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + B_n \frac{2\pi n x}{a} \right]$$

$$A_l = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi l x}{a}\right) dx,$$

$$B_l = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi l x}{a}\right) dx$$

**Beispiel zu Fourier-Integral**

komplexe  $U_n : U_n = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \frac{2\pi n x}{a}}$ ,  $n=0,1,2,\dots$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i \frac{2\pi n x}{a}}$$

$$A_n(\text{komplex}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i \frac{2\pi n x}{a}} f(x) dx$$

einfachere, schönere Schreibweise der Fourier-Reihe.

$$1) a \rightarrow \infty : \rightarrow \int_{-a}^a dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx$$

$$2) \frac{2\pi n}{a} \rightarrow k : \sum_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dn \dots = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \dots$$

$$3) A_n \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a} \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k) e^{ikx} dx$$

$$(***) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} \quad \text{mit } A(k) \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'$$

$$\Rightarrow (***) : A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'$$

*Fouriertransformierte Entwicklung* nach  $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

**Beweis**

$$\text{Vollständigkeit: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{ik(x-x')}$$

$$\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \right\}}_{\delta(x-x')} \stackrel{!}{=} f(x)$$

□

**3.4 Trennung der Variablen**

[A] Laplace Gl. in kart. Koord

Gesucht:  $\varphi(x, y)$  in  $V$

$$\Delta \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(x, y) = 0$$

*Separationsansatz*:  $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$

$$\Rightarrow g \frac{d^2}{dx^2} f + f \frac{d^2}{dy^2} g = 0 \quad | \cdot \frac{1}{fg}$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2}{dy^2} g(y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} f \stackrel{!}{=} -\frac{1}{g} \frac{d^2}{dy^2} g = -\alpha^2 \quad (\text{wg. Symm. der RB})$$

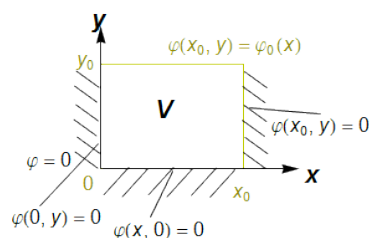
Lösg. sehr leicht:  $g(y) = a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y}$ ,  $f(x) = b_1 \sin(\alpha x) + b_2 \cos(\alpha x)$

Aus Randbedingung Kraft  $a_1, a_2, b_1, b_2$  bestimmen:

$$\varphi(0, y) = 0 \quad (f(0) = 0 \Rightarrow b_2 = 0)$$

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad (g(0) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1)$$

$$\varphi(x_0, y) = 0 \Rightarrow b_1 \sin(\alpha x_0) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv \alpha_n = \frac{n\pi}{x_0}$$



⇒ spezielle Lösg:  $\varphi_n(x, y) = \sin(\alpha_n x) \sinh(\alpha_n y)$

⇒ allg. Lösung:  $\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x, y)$

Also:  $\varphi(x, y_0) = \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{x_0} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right) \quad | \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right), \frac{2}{x_0} \int_0^x dx$

⇒  $\frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} dx \varphi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{x_0} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{m,n} \sinh\left(\frac{n\pi}{x_0} y_0\right) \stackrel{!}{=} c_m \sinh\left(\frac{m\pi}{x_0} y_0\right) \Rightarrow c_m$

[B]Kugelkoordinaten (d=3)

$x = r \cos(\varphi) \sin(\vartheta)$

$y = r \sin(\varphi) \sin(\vartheta)$

$z = r \cos(\vartheta)$

$\Delta$  in Kugelkoord (Mech. 1)

Jetzt kurzfristig (solange Kugelkoord)  $\phi(r, \vartheta, \varphi)$  Potential

$\Delta\phi = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi}\right) \phi$

$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \phi) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi$

$\Delta\phi = 0$

Separationsansatz:  $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} P(\vartheta) Q(\varphi)$

$0 = \frac{1}{r} \left\{ P Q \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{R}{r^2 \sin(\vartheta)} \left[ Q \frac{d}{d\vartheta} (\sin(\vartheta) \frac{dP}{d\vartheta}) + \frac{P}{\sin(\vartheta)} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} \right] \right\} \quad | \cdot \frac{r^3 \sin^2(\vartheta)}{R P Q}$

⇒ (\*) :  $r^2 \sin^2(\vartheta) \left[ \frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} (\sin(\vartheta) \frac{dP}{d\vartheta}) \right] = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} \stackrel{!}{=} -m^2$

$\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi \Rightarrow Q(\varphi) \stackrel{!}{=} Q(\varphi + 2\pi)$  (period. Lösg!)

⇒  $Q = e^{\pm im\varphi}$ ,  $e^{im\varphi + 2\pi} = e^{im\varphi} \Rightarrow e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots$

$\dots \cdot \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = - \underbrace{\left( \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{1}{P} \frac{d}{d\vartheta} (\sin(\vartheta) \frac{dP}{d\vartheta}) - \frac{m^2}{\sin^2(\vartheta)} \right)}_{\stackrel{!}{=} -l(l+1) \text{ reell}}$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0$$

Beh.  $R = Ar^{l+1} + Br^{-l}$

### Beweis

Durch Einsetzen:

$$(l+1)lAr^{l-1} - l(-l-1)Br^{-l-2}$$

$$-l(l+1)Ar^{l+1-2} - l(l+1)Br^{-l-2} = 0$$

□

$$x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \Rightarrow dx = -\sin(\vartheta) d\vartheta \Rightarrow \frac{1}{dx} = -\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{1}{d\vartheta}$$

$$x^2 = \cos^2(\vartheta) = 1 - \sin^2(\vartheta) \Rightarrow \sin^2(\vartheta) = 1 - x^2$$

$$\sin^2(\vartheta) \frac{dP}{dx} = -\sin^2(\vartheta) \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{dP}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \frac{dP}{d\vartheta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1)\right) P(x) = 0 \quad (*)$$

verallgemeinerte **Legendre** Gl.

$P(x) \equiv P_l^m(x) \equiv P_l^m(\cos \vartheta)$  („zugeordnete Legendre-Polynome“)

Wichtiger Spezialfall **Azimuthalsymmetrie**,  $Q$  unabh. von  $\varphi$   $Q(\varphi) = \text{const} \Rightarrow m \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + l(l+1)P = 0 \quad (**)$$

$$\text{Lösung: } P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \quad (***)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Für andere l-Werte gibt es keine im ganzen Wertebereich gültige Lösung.

$$l = 0 : P_0(x) = 1, \quad l = 1 : P_1(x) = x, \quad l = 2 : P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\text{Man kann zeigen } \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_k(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad (\text{orthogonal!})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x') \quad (\text{Vollständigkeit})$$

$$\text{Die allgemeine Lösung ist damit } \phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [A_l r^2 + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\vartheta)) \quad (***)$$

Ausgangspunkt für Beispiele mit *Azimuthalsymmetrie*.

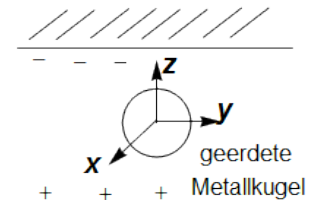
### Beispiel zu Pot. einer Kugel mit azimuthalsymmetrischer Flächenladungsdichte

$$\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$$

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos(\vartheta)) \sigma(\vartheta) P_l(\cos(\vartheta))$$

Gesucht:  $\phi(r, \vartheta)$

$A_l, B_l$  gesucht, Bedingungen für  $\phi$



$$1) \phi_i \text{ regulär (d.bar) bei } r=0 \Rightarrow B_l^{(i)} = 0 \Rightarrow \phi_i(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l^{(i)} r^l P_l(\cos(\vartheta))$$

$$2) \phi_a \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty \Rightarrow \phi_a(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) B_l^{(a)} r^{-l-1} P_l(\cos(\vartheta))$$

$$3) \phi \text{ stetig auf Kugeloberfläche: } \phi_i(R, \vartheta) \stackrel{!}{=} \phi_a(R, \vartheta) \Rightarrow B_l^{(a)} = A_l^{(i)} R^{2l+1}$$

4)  $E_n$  unstetig

$$\Rightarrow \sigma(\vartheta) = -\varepsilon_0 \left( \frac{\partial \phi_a}{\partial r} - \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos(\vartheta)) [-(l+1) B_l^{(a)} R^{-l-2} -$$

$$l A_l^{(i)} R^{l-1}]$$

$$= \varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 A_l^{(i)} R^{l-1} P_l(\cos(\vartheta))$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow \sigma_l = \varepsilon_0 (2l+1) A_l^{(i)} R^{l-1} \Rightarrow A_l^{(1)} = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0 (2l+1) R^{l-1}}$$

$$\Rightarrow \phi_i(r, \vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \left( \frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos(\vartheta))$$

$$\phi_a(r, \vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos(\vartheta))$$

Anwendung:

$$\text{Geg. } \sigma(\vartheta) = a_0 + a_1 \cos(\vartheta) \stackrel{!}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$$

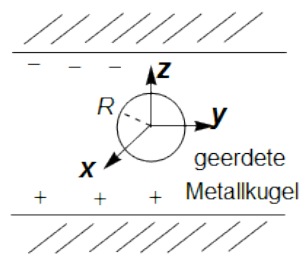
$$\Rightarrow a_0 = \sigma_0, \quad a_1 = 3\sigma_1, \quad \sigma_2, \sigma_3, \dots = 0$$

**Beispiel zu geerdete Metallkugel im hom. el Feld.**

$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$   
 gesucht:  $\phi, \sigma$   
 $\phi(r, \vartheta) = \dots A_l, B_l$   
 $\phi(R, \vartheta) = 0 \Rightarrow A_l R^l = -B_l R^{-(l+1)} \Rightarrow B_l = -A_l R^{2l+1}$

1)  $\phi_i$ : reg. bei  $\vec{r} = 0 \Rightarrow B_l^{(i)} = 0 \Rightarrow A_l(i) = 0 \Rightarrow \phi_i = 0$

2)  $\phi_a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 z = -E_0 r \cos(\vartheta) = -E_0 r P_1(\cos(\vartheta))$   
 $\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos(\vartheta)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 r P_1(\cos(\vartheta))$   
 vergl.  $A_1 = -\frac{1}{3} E_0, A_2 = A_3 = \dots = 0$   
 $B_1 = -A_1 R^3 = \frac{1}{3} E_0 R^3, B_2 = B_3 = \dots = 0$   
 (\*\*\*)  $\Rightarrow \phi_a(r, \vartheta) = -E_0 R \left( \frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\vartheta)$   
 $\Rightarrow \sigma(\vartheta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial r} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos(\vartheta)$



### 3.5 Kugelflächenfunktionen

Lösung von (\*) gesucht mit *Potenzreihenansatz*.

Man erhält, dass Konvergenz der Potenzreihe erfordert:  $l = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

Lösung:  $P(x) = P_l^m(x)$

$m > 0 : P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$   
bekannt

$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$

Allgemeine Lösung:  $P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}$

$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}$  (*Kugelflächenfunktion*)

$\Rightarrow \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

Allg. Lösg von  $\Delta_{r,\vartheta,\varphi} \phi = 0$ .

$Y_{lm}$  orthonormal

$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 (d \cos(\vartheta)) Y_{l'm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

Allg. Lösung setzt keine Symmetrien voraus.

Problem: Bestimmung von  $a_{lm}$  und  $b_{lm}$

Azimuthalsymmetrie: Unabh. von  $\varphi$  (siehe voriger Abschnitt)

$\phi = const$  für  $r \rightarrow \infty$

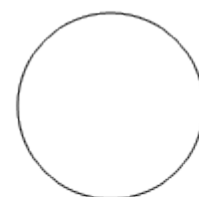
$a_{lm} = 0$  für  $l \geq 1$

$\phi = const$  für  $\vec{r} = 0 \Rightarrow b_{lm} = 0$

$Y_{lm}$  vollständig:  $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\cos(\vartheta) - \cos(\vartheta')) \delta(\varphi, \varphi')$

$Y_{lm}$ : zentrale Rolle in der QM bei Lösung der Schrödingergleichung, Potential  $\frac{1}{r}$

l: Drehimpulsquantenzahl, m: Quantenzahl der z-Komp des Drehimpulses



$\sigma(\vartheta, \varphi)$  bekannt

$\sigma(\vartheta, \varphi)$  entwickeln nach  $Y_{lm}$   
 $\rightarrow$  Koeff.  $\sigma_{lm} \rightarrow a_{lm}, b_{lm}$

## 4 Elektrostatik der Dielektrika

### 4.1 Übersicht

Dielektrika, Paraelektrika, Ferroelektrika

**Dielektrika:** Moleküle, positive und negative Ladungen (gebunden)

Elektr. Feld verschiebt + und - Ladungen relativ zueinander, d.h. durch Einfluss des Feldes werden lokale elektr. Dipole erzeugt und im Feld ausgerichtet.

(Verschiebungspolarisation)

**Paraelektrika:** Materie enthält bereits Permanente Dipole, z.B. auf Grund der Molekülstruktur ( $H_2O$ )

Diese Dipole werden im Feld ausgerichtet (Orientierungspolarisation)

**Ferroelektrika:** permanente Dipole (Seignette Salz, Bariumdikanat)

richten sich auf Grund der Dipol-Dipol-Wechselwirkung bereits ohne Feld in geordneter Weise unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  spontan aus.

Weit oberhalb  $T_c$ : Paraelektrika

Einfache mikroskopische Behandlung:

a) Verschiebungspolarisation:

isoliertes Atom, Kern + Elektronen  
fest harmonisch an Kern gebunden

$$m_e \ddot{x}_i = -m\omega_0^2 x_i + qE_i (i = 1, 2, 3)$$

$$x_i(t) = x_{i0} \cos(\omega_0 t - \beta_i) + \frac{q}{m_e \omega_0^2} E_i$$

Dipolmoment:  $p_i = qx_i$

N Atome, unabh. voneinander

Jetzt: räuml. Mittelung über alle ~~Atome~~ Elektronen, die alle unabh. voneinander schwingen:

$$\langle \vec{x}_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\dots)$$

$\Rightarrow$  Zeitabh. Terme mitteln sich raus

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{q^2}{m_e \omega_0^2} \vec{E} \quad (\text{für } 1e^-)$$

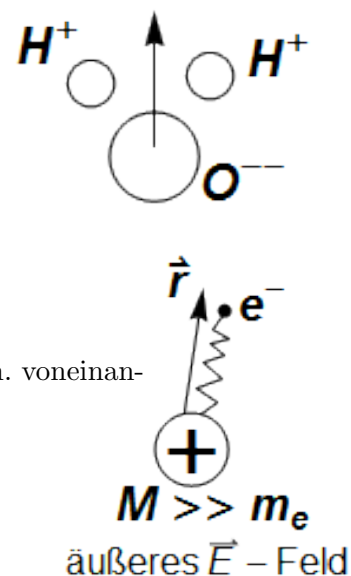
$$Z \text{ Elektronen: } \vec{p} = \sum_{l=1}^Z \frac{q^2}{m_e \omega_{0,l}^2} \vec{E} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$$

b) Orientierungspolarisation:

N Dipole,  $p_i$  permanent

Temperatur (Entropie) steht völliger Ausrichtung entgegen, wichtig bei  $T > 0$

$$\text{Wärmelehre: } \langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{p^2}{3kT} \vec{E} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$$



### 4.2 Elektrische Polarisation und dielektrische Verschiebung

Materie besitzt Dipolmomente (entweder durch Feldeinwirkung oder schon vorhanden)

$$\varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\vec{P}(\vec{r}') : \sum_{\text{alle p in } d^3r} \vec{p} = \vec{P}(\vec{r}') d^3r' \text{ (el. Polarisation)}$$

Jetzt: „ $\Sigma$ “ über alle kleinen Volumina  $d^3r'$ :

$$\Rightarrow \varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \equiv \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{r'} \left[ \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \vec{P}(\vec{r}')$$

$$\text{einsetzen: } \varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\int_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \left[ \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]}_{\int_{S(V)} \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{f}} - \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

=0, da  $\vec{P}$  auf  $S(V)$   
( $V$  viel größer als Materievolumen.)

$$\Rightarrow \varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{-\vec{\nabla}_{r'} \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

außerdem: freie Ladungen mit Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$

$$\varphi_a(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_p(\vec{r}) + \varphi_a(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}_{r'} \vec{P}(\vec{r}'))$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\vec{E} = \vec{\nabla} \varphi)$$

$$\text{Also } \vec{\nabla} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \vec{P}(\vec{r}))$$

(ganz allgemein; noch keine Aussage, wie  $\vec{P}$  von  $\vec{E}$  abhängt)

Auf 2 Arten interpretierbar:

$$\text{a) } \vec{\nabla} \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho \text{ (freie Ladungsdichte)}$$

$\vec{D}$ : dielektrische Verschiebung

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{\nabla} \vec{D} = \rho, \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{Maxwellgl., der Elektrostatik})$$

$\vec{D}$  unabh. von betrachteten Diel. hängt nur ab von  $\rho$ , Hilfsgröße

$\vec{E}$ : eigentliche Messgröße, über  $\vec{K}$  hängt über  $\vec{P}$  vom Medium ab.

$$\frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \vec{E}_a \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_p = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$\vec{P}$  wirkt wie inneres Zusatzfeld, das sich dem durch die freien Ladungen erzeugten Feld  $\vec{E}_a = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$  überlagert.

$$\text{b) } \rho_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \vec{P}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}))$$

$$\vec{P}: \vec{\nabla} \vec{P} \quad \text{wichtig}$$

$\vec{P}(\vec{E}), \vec{P}(0) = 0$  entwickeln von  $\vec{P}$  nach  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} = \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \epsilon_0 \vec{E} \epsilon_r \text{ relativer Dielektrizitätskonst. } P_i = \epsilon n \sum_{j=1}^3 \xi_{ij} E_j, i, j =$$

1, 2, 3 ( $x, y, z$ )

$\chi_{ij}$ : Suszeptibilitätstensor

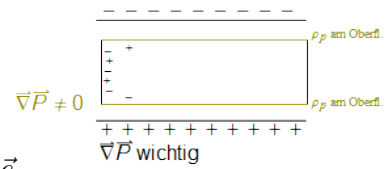
Falls Medium isotrop:  $\chi_{ij} \chi_e \delta_{ij} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \xi_e \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

( $\infty$  groß)

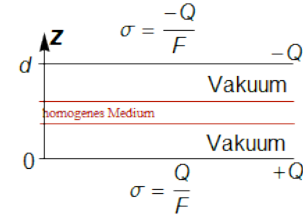
Unterscheiden  $\vec{E}$  im Medium und Vakuum.

Wir wissen aus Symmetriegründen  $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z \Rightarrow D(z) \vec{e}_z$



$$1) \vec{D} : \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \xrightarrow{\text{Kap. 2.5}} \vec{D} = \begin{cases} \sigma \vec{e}_z & , \text{innen} \\ 0 & , \text{außen} \end{cases}$$

$$2) \vec{E} : \vec{E} = \begin{cases} \vec{D} / \epsilon_0 & , \text{im Vakuum} \\ \vec{D} / \epsilon_0 \epsilon_r & , \text{im Medium} \end{cases}$$



$$2) \vec{P} = \begin{cases} 0 & , \text{im Vakuum} \\ \text{vec} D - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \frac{\vec{D}}{\epsilon_r} = \frac{\epsilon_r - \epsilon_0}{\epsilon_r} \vec{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma \vec{e}_z & , \text{im Medium} \end{cases}$$

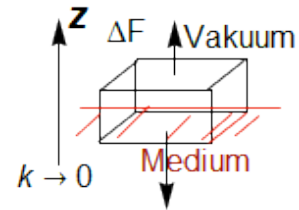
$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \int_{S(V)} \vec{P} d\vec{f} = \Delta F (-P_z) = -\Delta F \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma$$

$$\stackrel{!}{=} - \int_V d^3r \rho_p \stackrel{!}{=} -\Delta F \sigma_p \Rightarrow \sigma_p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma$$

Kapazität:

$$U = E_z d = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} d = \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q}{F}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{F}{d} = \epsilon_r C_0$$



### 4.3 Randwertprobleme und Dielektrika

$\vec{D}, \vec{E}$  an Grenzfläche Stetigkeitsbedingungen?

Alles wie in Kap 2.7

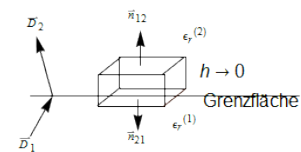
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{n}_{12} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \text{ (Gauss)}$$

$\sigma$ : Flächenladungsdichte der freien Ladung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 \text{ (Stokes)}$$

Falls  $\sigma = 0$  auf Grenzfläche:  $D_{1,n} = D_{2,n}$ ,  $\vec{D}$  normal stetig  $\Rightarrow E_{1,n} = \frac{\epsilon_r^{(2)}}{\epsilon_r^{(1)}} E_{2,n}$

sowieso:  $E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow D_{1t} = \frac{\epsilon_r^{(1)}}{\epsilon_r^{(2)}} D_{2t}$



### 4.4 Elektrostatische Energie

Vakuum:  $W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})$

Dieser Ausdruck kann nicht direkt übernommen werden, da ein Dielektrikum der Aufbau der polarisationsladungen ebenfalls Energie erfordert.

Betr. kleine Änderung der Energie  $\delta W$ , die durch Änderung  $\delta \rho$  der Ladungsdichte  $\rho$ .

Die bei der Änderung aufzubringende Arbeit ist  $\delta W = \int d^3r \phi(\vec{r}) \delta \rho(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} = \delta \rho$$

$$\phi \delta \rho = \phi \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \delta \vec{D}) - \underbrace{\vec{\nabla} \phi}_{\vec{E}} \cdot \delta \vec{D}$$



$$\Rightarrow \delta W = \int d^3r \vec{E} \delta \vec{D} + \int_{S(V)} d\vec{f}(\varphi \delta \vec{D})$$

$$\xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0, \text{ da } \varphi(\infty) = 0$$

Isotropes Medium:

$$\vec{E} \delta \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underbrace{\vec{E} \delta \vec{E}}_{\frac{1}{2}(\vec{E} \delta \vec{E} + \delta \vec{E} \vec{E})} = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \vec{D})$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d^3r \delta(\vec{E} \vec{D}) \Rightarrow \delta(W) = \delta\left(\frac{1}{2} \int d^3r \vec{E} \vec{D}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{E} \vec{D}}$$

## 5 Magnetostatik

Bisher: ruhende el. Ladungen üben Kraft auf andere el. Ladungen aus  $\Rightarrow \vec{E}$ -Feld

Jetzt: stationärer Strom el. Ladungen

Exp: Stromdurchflossene Leiter übt Kraft auf andere stromdurfl. Leiter aus  
neues Feld: **Magnetfeld** (Biot-Savart)

### 5.1 Elektrischer Strom

**el. Stromg:** geordnete Bewegung el. Ladungen (wie Wasserstrom)

Erzeugung:

- 1) Verschiebung der Ladung im Raum (**Konvektion**)
- 2) Erzeugen einer Potentialdifferenz  $U$  zwischen den Enden eines metallischen Leiters  $\Rightarrow$  Kraft auf (quasi-)freie Ladungen im Draht  $\Rightarrow$  Strom

Ladungsmene  $\Delta Q$  durch Fläche:

$$\Delta Q = F \Delta z n q = F v \Delta t n q$$

$$\text{Stromstärke } I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = F n v q}$$

Einheit: Ampere  $A = \frac{C}{s}$

Verallgemeinerung:

$$\text{Stromdichte } \vec{j} = \frac{I}{\Delta F} \vec{e}_v$$

$\vec{e}_v$ : Einheitsvektor in Richtung der Geschw. der Ladungen.

Dünner Draht:  $\vec{v}$  in Drahtichtung

$$\vec{e}_v \rightarrow \vec{e}_l$$

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta F} \vec{e}_l$$

$$d^3r = \Delta F dl = \Delta V$$

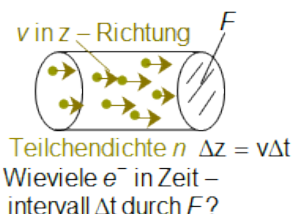
$$\Rightarrow \vec{j} d^3r = \frac{I}{\Delta F} \Delta F dl \vec{e}_l = I dl \vec{e}_l$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) d^3r = I(\vec{r}, t) dl \vec{e}_l$$

Allgemein:

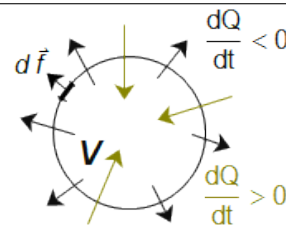
$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \text{ klar.}$$

$$I = \int_F \vec{j} d\vec{f}$$



Allgemeiner Zusammenhang zwischen  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r}_{\text{Ladung } Q \text{ in } V} \stackrel{!}{=} - \underbrace{\int_{S(V)} \vec{j} d\vec{f}}_{\text{Ladungsstr. durch Oberfl.}} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3r$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0} \text{ Kontinuitätsgleichung}$$

(Nicht beschränkt auf E-Dynamik!)

Magnetostatik:  $\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$

Ohmische Gerade:

$$I = \frac{U}{R} = U \Sigma \text{ lokal: } \vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (\sigma: \text{spezifische Leitfähigkeit}) \text{ Materialgleichung}$$

Mit  $\vec{E}$ -Feld

$e^-$  werden beschleunigt, bis sie mit anderen  $e^-$  oder den Ionenrümpfen zusammenstoßen

Dann wird  $\vec{v}_{\text{Feld}}$  gleich Null und Beschleunigung durch Feld beginnt aufs neue Geschwindigkeit des l-ten Elektrons

$$\vec{v}_l = \underbrace{\vec{v}_l(0)}_{\text{ohne Feld}} + \underbrace{\frac{q}{m} \vec{E}}_{\text{Beschl}} \underbrace{t_l}_{\text{Zeit nach letzten Zus.stoß}}$$

Def: *Mittlere Geschw.:*

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \vec{v}_l$$

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \vec{v}_l t_l \text{ (mittlere Zeit nach letztem Stoß „mittlere Stoßzeit“)}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \underbrace{\vec{v}(0)}_{=0} = -nev$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -nev \bar{v} = \frac{e^2 n \tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}} \text{ Drude-Formel}$$

Elektr. Leistung:

Ladung q wird im  $\vec{E}$ -Feld um  $\vec{r}$  verschoben.

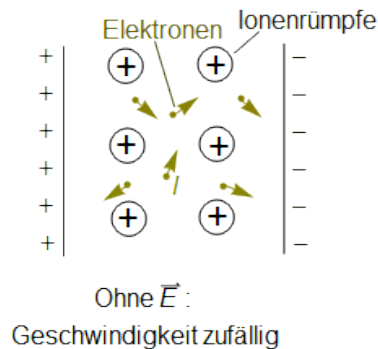
$$\text{geleistete Arbeit: } dW = \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = q \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Verschiebung in Zeit dt

$$\text{Leistung: } \frac{dW}{dt} = q \vec{E}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} = q \vec{E}(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$$

$$\rho(\vec{r}) d^3r \vec{E}(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} \vec{E}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3r$$

Alle Ladungen in V  $\Rightarrow \boxed{P = \int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})}$



### 5.2 Biot-Savart Gesetz

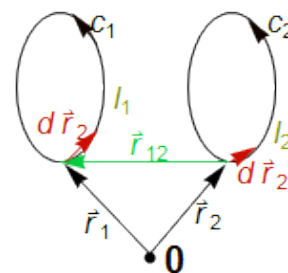
Experimentell (Ampere)

Kraft von 2 auf 1:  $\vec{K}_{12}$

$$\boxed{\vec{K}_{12} = I_1 \oint_{c_1} d\vec{r}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{c_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}} \text{ Biot-Savart}$$

$\mu_0$ : magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \quad (\epsilon_0 \mu_c^2 = 1)$$



$$\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}_2 x(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} : \vec{B}_2(\vec{r}_1) \text{ magn. Induktion}$$

Verallgemeinerung auf beliebige Stromdichte

$$\int_c I d\vec{r}' \rightarrow \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Elektrostatik  $\vec{E} : \rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')$

Magnetostatik  $\vec{B} : \vec{j}(\vec{r}')x(\vec{r} - \vec{r}')$

### Beispiel zu Feld eines geraden Leiters

Leiter  $\infty$  lang.

Zylindersymmetrie  $\Rightarrow$  Zylinderkoordinat sinnvoll.

$\rho, \varphi, z$

$\vec{r}' = z' \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c d\vec{r}' \frac{x(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}_\rho + (z - z') \vec{e}_z$

$$\Rightarrow d\vec{r}' x(\vec{r} - \vec{r}') = \rho dz' \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho)}_{\vec{e}_\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \rho \vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2}$$

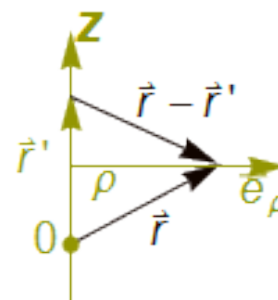
$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{K} = \int_V d^3 r (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}))$$

Bsp.:  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  Punktladung am Ort  $\vec{r}_0$

$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$$\Rightarrow \vec{K} = qv(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0) \text{ Lorentzkraft}$$



## 5.3 Maxwellgleichungen und Vektorpotential

Umformung von  $\vec{B}$

(\*) Es gilt:  $\vec{\nabla}_\varphi \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a}) - \underbrace{\varphi(\vec{\nabla} \times \vec{a})}_{\vec{a} \text{ const}}$

$$\vec{j}(\vec{r}') \times \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{-\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} = +\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{j}(\vec{r}') \stackrel{*}{=} \vec{\nabla}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \text{ mit } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{Vektorpotential})$$

$\vec{B}$ : reines Wirbelfeld

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad \text{homogene Maxwellgl. der Magnetostatik (Differentialform)}$$

$$\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{B}(\vec{r}) d\vec{f} \quad (\text{Integralform})$$

Aus Zerlegungssatz folgt, da  $\vec{B}(\vec{r})$  reines Wirbelfeld:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{inhomogene Maxwellgl. der Magnetostatik}$$

$$\text{Stokes: } \oint_{S(C)} (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\mu_0 \vec{j}}) d\vec{f} = \oint_{S(C)} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I$$

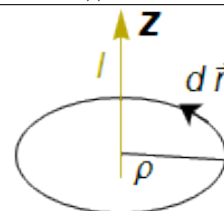
(*Ampere-Durchflutungsgesetz* für praktische Anwendungen (sehr wichtig))

### Beispiel zu 5.3

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

$$\int_C \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I = B_\varphi(\rho) \int_C dr = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$



Zurück zu  $\vec{A}(\vec{r})$

$A(\vec{r})$  Hilfsgröße, legt  $\vec{B}$  nicht eindeutig fest

$$A(\vec{r}) \rightarrow A(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi \quad (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0) \quad (\text{kein Beitrag zu } \vec{B})$$

$\chi$  frei verfügbar,  $\chi$ , so dass wählbar dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{Coulomb-Eichung})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot A) \quad \boxed{-\Delta A = \mu_0 \vec{j}} \quad (\text{Poissongleichung})$$

(siehe Elektrostatik)

d.h.: in der Elektrostatik anwendbar auf entsprechende Randprobleme in der Magnetostatik

## 5.4 Magnetostatisches Moment

Magnet. Moment ist genauso wichtig für Magnetostatik wie el. Ladung in der Elektrostatik.

Betr.:  $\vec{A}(\vec{r})$ :

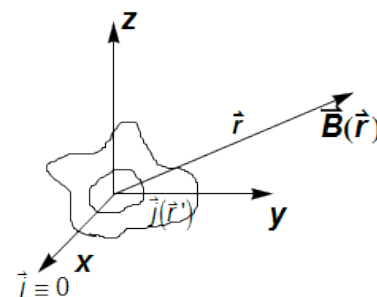
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}}_{\text{Dipol}} + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3r' \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}')}_{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}} + \dots$$

keine magn. Monop.

$$\text{Mit } \vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$$

$$(*) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$



**Beweis**

Hilfssatz:

$$\text{Beh.: } \hat{I} = \int d^3 r' \left[ f(\vec{r}') (\vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} g(\vec{r}')) + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} f(\vec{r}') \right] \stackrel{!}{=} 0$$

f,g stetig differenzierbar

**Beweis**

$$\vec{\nabla} g f \vec{j} = g f \underbrace{\vec{\nabla} \vec{j}}_{\stackrel{!}{=} 0} + \vec{j} \vec{\nabla} (g f) = \underbrace{f(\vec{j} \vec{\nabla} g) + g(\vec{j} \vec{\nabla} f)}_{\text{Integrand}}$$

$$\text{Also } \hat{I} = \int_V d^3 r' \vec{\nabla} g f \vec{j} \stackrel{**}{=} \oint_{S(V)} d\vec{f}' g f \vec{j} = 0$$

mit (\*\*) üblicher Trick mittels Gauß

□

Spezialfälle:

$$\text{a) } f = 1, g = x'_i \Rightarrow \vec{\nabla} x'_i = \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \int d^3 r' \vec{j}_i = 0$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' \vec{j} = 0$$

$$\text{b) } f = x'_i, g = x'_l \Rightarrow \int d^3 r' (x'_i j_l + x'_l j_i) = 0$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' x'_l j_i = - \int d^3 r' x'_i j_l$$

Weiter in Übung. (Nolting)

□

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (\text{Nolting})$$

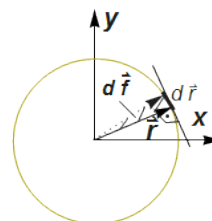
$$\Rightarrow \vec{B} \stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

dieselbe Gestalt wie in der Elektrostatik ( $\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}$ )

**Beispiel zu Geschlossener Stromkreis**

$$d^3r \vec{j}(\vec{r}) \rightarrow Id\vec{r} \text{ entlang Draht}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \int_C (\vec{r} \times d\vec{r}) \vec{r} \times d\vec{r} = |\vec{r} \times d\vec{r}| \vec{e}_z \Rightarrow \vec{m} = IF\vec{e}_z$$

**Beispiel zu N Punktladungen**

Wir betrachten:  $N$  Punktladungen der Ladung  $q$  und Masse  $M_0$

$$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i(t))$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} q \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i(t) \times \vec{v}_i) \frac{M_0}{M_0}$$

$\Rightarrow (\vec{R}_i(t) \times \vec{v}_i) M_0 = \vec{l}_i$ : Bahndrehimpuls des  $i$ -ten Teilchens

$\Rightarrow \sum \dots$ : gesamter Impuls

$$\vec{m} = \frac{q}{2M_0} \vec{L}$$

mit  $\frac{q}{2M_0}$ : Pyromagnet. Verhältnis

Kraftwirkung eines externen Magnetfeldes auf Stromerteilung

$\vec{B}_e(\vec{r})$  um  $\vec{r} = 0$  entwickeln:

$$\vec{B}_e(\vec{r}) = \vec{B}_e(0) + \vec{r} \vec{\nabla} \vec{B}_e(\vec{r})|_0 + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{K} = \int d^3r (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}_e(\vec{r})) = \underbrace{-\vec{B}_e(0) \times \int d^3r \vec{j}}_{=0} + \int d^3r [\vec{j} \times (\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{B}_e(\vec{r})|_0]$$

Man kann zeigen:

$$\vec{K} = (\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}_e(\vec{r})|_0 = \vec{\nabla} (\vec{m} \vec{B}_e) - \vec{m} (\underbrace{\vec{\nabla} \vec{B}_e|_0}_{=0})$$

$$\vec{K} = -\vec{\nabla} V$$

$$V = -\vec{m} \vec{B}_e(0) = -m B_e(0) \cos(\vartheta)$$

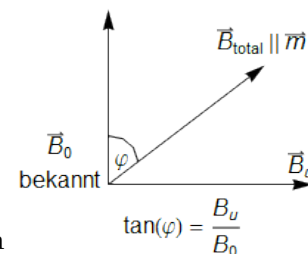
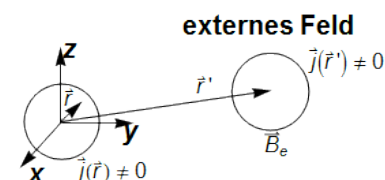
$$\vartheta = 0 : V \text{ Minimum} \Rightarrow \vec{m} \parallel \text{vec} B$$

Anwendungen:

- 1) Kompassnadel:  $\vec{m}$  in Richtung  $\vec{B}_e$  (Nordrichtung bei Erdfeld)
- 2) Bestimmung eines unbekanntes Magnetfeldes  $\vec{B}_u$  mit Kompass
- 3) Wechselwirkungsenergie 2er magnetdipole  $\vec{m}_1, \vec{m}_2$

$$V_{12} = -\vec{m}_1 \vec{B}_e(\vec{m}_2), \vec{r}_{12} \text{ Abstandsvektor}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m}_1 \vec{r}_{12})(\vec{m}_2 \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{\vec{m}_1 \vec{m}_2}{r_{12}^3} \right] \text{ identische Formel wie bei Dipolen}$$

**5.5 Magnetostatik in Materie**

Einteilung der magnet. Stoffe:

**a) Diamagnetismus:** keine permanentmagnet. Dipole. Eingeschaltetes Magnetfeld induziert Dipole. Diese sind dem Magnetfeld entgegengerichtet (Lenz-Regel)

**b) Paramagnetismus:** permanente magn. Dipole entstehen. Diese werde im Magnetfeld ausgerichtet.

$$\chi_m(T) = \frac{c}{T}$$

**c) Ferromagnetismus, Antiferromagnetismus:** magnet. Dipole ausgerichtet

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Magnetisierung} & (T < T_C) \\ \text{Paramagnet.} & (T > T_C) \end{cases}$$

Gesucht: mikroskop. Beschreibung in Analogie zum Vorgehen bei Dielektrika.

$$d\vec{A}_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Über das gesamte Vol. integrieren.

$$\Rightarrow \text{vec} A_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{M}'(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{Außerdem } \vec{A}_{frei}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}_{frei}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_{mag} + \vec{A}_{frei}$$

$$\underbrace{\vec{M}(\vec{r}')}_{\vec{a}} \times \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'}}_{\varphi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -(\vec{\nabla}_{\vec{r}'}, \varphi) \times \vec{a} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times (\varphi \vec{a}) + \varphi \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \left( -\vec{\nabla}'_r \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{\nabla}'_r \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Übungen:

$$\int_V d^3r' (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \int_{S(V)} d\vec{f} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{j}_{frei} + \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}'))$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{B}(\vec{r}'))$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{gesamt} = \mu_0 \vec{j}_{frei} + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{M})}$$

Ab jetzt genauso weiter wie in Elektrostatik

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}_{\vec{H}} \right) = \vec{j}_{frei}$$

$\vec{H}$  (Magnetfeld)

$\vec{B}$ : magnetische Induktion  $\hat{=} \vec{E}$  mag. Kraftwirkung

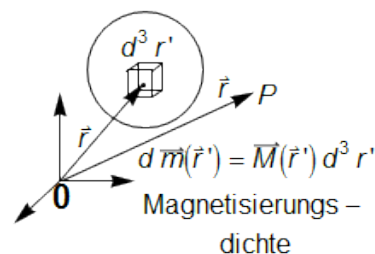
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{frei} \Rightarrow \vec{H} \text{ entspricht } \vec{D}!$$

Lineares isotropes Medium:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \vec{H}$$

$\chi_m$ : magnetische Suszeptibilität.



**Beispiel zu Kugel, homogen magnetisiert**

$$\vec{M}(\vec{r}) = M_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{j}_{frei} = 0$$

$$\vec{j}_{frei} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$$

$\varphi_m$ : magnetisches Potential

$$0? \vec{\nabla} \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi_m = \vec{\nabla} \vec{M} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Keine Randbedingungen:

$$\text{Elektrostatik} \Rightarrow \varphi_m = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{übl. Trick: } \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \underbrace{\vec{M}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{+M(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

$$\int_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \oint_{S(V)} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

speziell Kugel, homogen, magnetisiert,  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ :

$$\Rightarrow \varphi_m(\vec{r}) = -\frac{M_0}{4\pi} \frac{d}{dz} \int_{V_{Kugel}} d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

**5.6 Verhalten an Grenzflächen**

völlig analog zur Elektrostatik!

$$\text{a) } \vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow B_{2n} = B_{1n} \text{ normalstetig}$$

$$\Rightarrow H_{2n} = \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} H_{1n} \text{ unstetig}$$

$$\text{b) } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{frei}$$

$$\Rightarrow H_{2t} = H_{1t}, \text{ falls } \vec{j}_{frei} = 0$$

$$\Rightarrow B_{2t} = \frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}} B_{1t}$$

**6 Elektrodynamik**

Zeitunabhängige Felder:

- Elektrostatische Gl:  $\vec{\nabla} \vec{D} = \rho$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ,  $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$

- Magnetostatische Gl:  $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ ,  $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$

Ab jetzt: zeitabhängig Felder

**6.1 Faradaysches Induktionsgesetz und Maxwell'sche Ergänzung**

$$\text{a) } \textit{Faradaysches Induktionsgesetz}$$



α) Entdeckung Faradays:

In einem Leiter entsteht ein Strom, wenn ein in der Nähe befindlicher Magnet bewegt wird oder wenn der Leiter im Magnetfeld bewegt wird.

Änderung des Induktionsfeldes induziert ein elektrisches Feld.

β) Definition des Induktionsflusses oder des magnetischen Flusses

$$\phi = \int_F \vec{B} d\vec{f}$$

$$\text{Dimension von } \phi : [\phi] = [\vec{B}][d\vec{f}] = \frac{Vs}{m^2} m^2 = Vs$$

1Vs=1Wb (Weber)

geschlossene Flächen verschwindet der Induktionsfluss:

$$\int_{F(V)} \vec{B} d\vec{f} = \int_V (\text{div}(\vec{B})) dV = 0$$

γ) Faradaysches Induktionsgesetz:

$$\oint_{R(F)} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{f} = - \frac{d}{dt} \phi$$

Umlaufrichtung um Rand der Fläche und Richtung der differentiellen Flächennormalen sind durch ein Rechtssystem festgelegt.

Faradaysches Induktionsgesetz

F. Induktionsgesetz bei Veränderung der Fläche kann aus Lorentzkraft abgeleitet werden.

δ) Induktionsgesetz in differentieller Form

Annahme: keine zeitliche Änderung der Fläche, ruhender Rand der Fläche,

bzw. ruhende Leiter

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f}$$

$$\oint_{S(F)} \vec{E} d\vec{s} = \int_F \text{rot}(\vec{E}) d\vec{f} = - \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f}$$

$$\int_F (\text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) d\vec{f} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Differentielle Form des Induktionsgesetzes

b) Maxwellsche Ergänzung:

Magnetostatik *Oerstedesches Gesetz in Differentialform*  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$

$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{div}(\vec{j}) \rightarrow \text{div}(\vec{j}) = 0$  (gilt bei *stationären Strömen*)

*nichtstationäre Ströme*  $\text{div}(\vec{j}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$0 = \text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{D}) = \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \text{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{H})) = \text{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

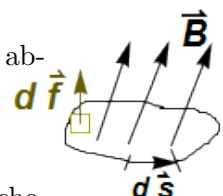
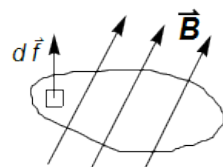
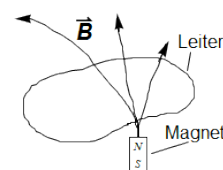
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  heißt *Verschiebungsstromdichte*, *Maxwellsche Ergänzung*

c) *Grundgleichungen der Elektrodynamik* in differentieller Form gelten nur für ruhende Medien und ruhende Leiter.

α) Die elektrische Ladung als Quelle des elektrischen Verschiebungsvektors

β) Quellfreiheit des magnetischen Induktionsfeldes

$$\text{div}(\vec{D}) = 0 \quad (\text{Nichtexistenz von magn. Monopolen})$$



$\gamma$  *Erweitertes Oerstedisches Gesetz:*

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{Verschiebungsstromdichte, von Maxwell eingeführt}$$

$\delta$ ) Faradaysches Induktionsgesetz:

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ gültig für nicht-bewegte Leiter}$$

$\epsilon$ ) *Materialgleichungen (Verbindungsgleichungen)*

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon : \text{Dielektrizitätskonstante}$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad \mu : \text{Permeabilitätskonstante}$$

Im Vakuum:  $\epsilon_0, \mu_0$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \sigma : \text{Leitfähigkeit}$$

$\zeta$ ) Kraft auf Ladung

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

kontinuierliche Ladungsverteilung,

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v}, \quad \rho = \frac{dq}{dV}$$

## 6.2 Elektrodynamische Potentiale

Maxwell-Gl:

$$(1) \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(2) \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

$$(4) \operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

Gegeben: Ladungs- und Stromverteilung  $\rho, \vec{j}$

Gesucht: Felder  $\vec{E}, \vec{B}$

a) Das *Vektorpotential* und das *skalare Potential*:

$$\text{wegen } \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\text{wird allgemein gelöst durch } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}(\varphi)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A})$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

lösen Gleichung 2 und 4 für beliebige Potential  $\vec{A}$  und  $\varphi$

$\varphi$ : skalares Potential

$\vec{A}$ : Vektorpotential

b) *Eichtransformation*

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}(\psi), \quad \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}') = \operatorname{rot}(\vec{A}), \quad \text{Induktionsfeld ändert sich nicht!}$$

$\psi$  ist willkürliches Potential

zu  $\vec{A}'$  gehöre  $\varphi'$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}(\varphi') - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = -\operatorname{grad}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}(\psi)$$

Eine solche Transformation lässt  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  invariant.

Man nennt eine solche Transformation Eichtransformation

- c) Differentialgleichungen für  $\vec{A}$  und  $\varphi$   $\vec{A}$  und  $\varphi$  wird durch die beiden restlichen Maxwellgleichungen bestimmt:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div}(\vec{D}) = \rho$$

$\mu$  und  $\varepsilon$  seien orts- und zeitunabhängig

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$1) \quad \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(\vec{A})\right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}((\varepsilon)(-\text{grad}(\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})))$$

$$\frac{1}{\mu}(\text{grad}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}) = \vec{j} - \varepsilon \text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{-\Delta \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad}(\text{div}(\vec{A})) + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{j}}$$

$$2) \quad \text{div}\left(\varepsilon(-\text{grad}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})\right) = \rho$$

$$\boxed{-\Delta \rho - \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

- d) *Eichung:*

- $\alpha)$  *Coulombeichung:*

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

Daher Name: Coulombeichung (heißt auch *Transversale Eichung*)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A} \text{ bestimmt sich aus } \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} + \varepsilon \mu \text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

(*inhomogene Wellengleichung*)

- $\beta)$  *Lorentzeichung:*

$$\text{div}(\vec{A}) + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\Delta A - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}}$$

$$\boxed{\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon}}$$

Entkopplung der beiden Potentiale  $\vec{A}$  und  $\varphi$

Wichtig für spezielle Relativitätstheorie.

(Sind invariant gegen Lorentztransformation)

### 6.3 Die Energiebilanz

- a) Arbeit und Leistung beim Verschieben von Ladungen im elektromagnetischen Feld

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} + q \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

$$\text{Leistung } P = \frac{dA}{dt} \vec{F} \vec{v} = q \vec{E} \vec{v} + q (\vec{v} \times \vec{B}) \vec{v} = q \vec{E} \vec{v}$$

$$\text{Leistungsdichte: } \frac{dP}{dV} = \frac{dq}{dV} \vec{E} \vec{v} = \rho \vec{v} \vec{E} = \vec{j} \vec{E}$$

$$\text{Einheit: } \left[\frac{dP}{dV}\right] = \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

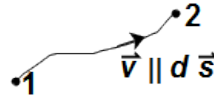
- b) *Energiesatz der Elektrodynamik:*

$$\vec{j} \vec{E} = (\text{rot}(\vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \vec{E}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H} \operatorname{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \operatorname{rot}(\vec{H}) \\
(\operatorname{rot}(\vec{H}))\vec{E} &= \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \\
\vec{j} \vec{E} &= -(\vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \\
\int_V \vec{j} \vec{E} dV &= - \int_V (\vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) dV - \underbrace{\int_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV}_{\int_{F(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{f}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_V \vec{j} \vec{E} dV + \int_{F(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{f} = - \int_V (\vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) dV}$$

$$A = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} + q \underbrace{\int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}}_{=0}$$



1. Term: Leistung des Feldes an Ladungsträgern

2. Term:  $[\vec{E} \times \vec{H}] = [\frac{V}{m} \frac{A}{m}] = [\frac{W s}{m^2 s}] = [\frac{J}{m^2 s}]$

Dimension ist die Energie pro Zeit und pro Flächeneinheit

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \text{Poyntingscher Vektor}$

$$\int_{F(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{f} = \int_{F(V)} \vec{S} d\vec{f}$$

Energie, die pro Zeit aus dem Volumen heraustritt.

$$[\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}] = [\frac{V}{m} \frac{A}{m^2} \frac{s}{s}] = [\frac{J}{m^3 s}]$$

$$[\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] = [\frac{A}{m} \frac{V}{m^2} \frac{s}{s}] = [\frac{J}{m^3 s}]$$

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = \frac{dA}{dt}$$

Leistung des Feldes am Ladungsträgern wird umgewandelt in mechanische Energie, Wärmeenergie, falls Leiter mit Widerstand vorhanden ist.

$$\int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) dV = \frac{dW}{dt}$$

W=Energie des elektromagnetischen Feldes in V.

$$\boxed{\frac{dA}{dt} + \frac{dW}{dt} = - \int_{F(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{f}}$$

**Energie-Erhaltungssatz**, wenn keine Teilchenströme aus dem Volumen heraustritten.

c) **Energiedichte** des elektromagnetischen Feldes

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV$$

$$W = \int_t \int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV dt$$

$$\frac{dW}{dV} = \text{Energiedichte}$$

$$\frac{dW}{dV} = \int_t (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dt = u$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$du_{el} = \vec{E} d\vec{D}, \quad du_{magn} = \vec{H} d\vec{B}$$

**Lineare Medien:**  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$   $\epsilon$  und  $\mu$  sind konstant

$$du_{el} = \vec{E} \epsilon d\vec{E} = \frac{\epsilon}{2} d\vec{E}^2 = \frac{1}{2} d(\vec{E} \vec{D})$$

$$du_{ag} = \vec{H} \mu d\vec{H} = \frac{\mu}{2} d\vec{H}^2 = \frac{1}{2} d(\vec{H} \vec{B})$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}}$$

**Lineare anisotrope Medien:**  $\epsilon$  und  $\mu$  sind Matrizen

Dies gilt auch für lineare anisotrope Medien

## Stichwortverzeichnis

### Symbols

$\infty$  ausgedehnte geladene Ebene ..... 11

### A

Achsialsymmetrie ..... 11

Ampere-Durchflutungsgesetz ..... 26

Azimuthalsymmetrie ..... 18

Azimuthalsymmetrie ..... 17

### B

Bildkraft ..... 14

Bildladungen ..... 14

### C

Coulombbeziehung ..... 33

### D

dielektrische Verschiebung ..... 21

Dipolfeld ..... 10

Dirichlet-Randbedingung ..... 12

Divergenz ..... 1

### E

Eichtransformation ..... 32

Eichung ..... 33

elektrische Polarisierung ..... 21

elektrischer Strom ..... 23

Elektrostatik ..... 6

Energie-Erhaltungssatz ..... 34

Energiedichte ..... 10, 34

Energiesatz der Elektrodynamik ..... 33

Erweitertes Oerstedtsches Gesetz ..... 32

Externe Ladungsverteilung ..... 10

### F

Faradaysches Induktionsgesetz ..... 30

Fernzone ..... 8

Flächendichte der Zirkulation ..... 5

Flächenelemente ..... 3

Fouriertransformierte Entwicklung ..... 16

Fouriertransformierte ..... 1

freie Ladungsdichte ..... 21

### G

Gauß-Satz ..... 5

geschlossener Oberfläche ..... 3

Gradient ..... 1

Greenschen Identität ..... 5

Grenzfläche ..... 10

Grundgleichungen der Elektrodynamik ..... 31

### I

influenzierte Flächenladung ..... 14

influenzierte Flächenladungsdichte ..... 12

Influenzierte Ladungsdichte ..... 14

inhomogene Wellengleichung ..... 33

Integraldarstellung der Rotation ..... 5

Integraldarstellung des Gradienten ..... 4

### K

Kapazität ..... 11

Kontinuitätsgleichung ..... 24

Konvektion ..... 23

Kugelflächenfunktion ..... 19

### L

Ladungskonfiguration ..... 6

Legendre ..... 17

Lineare anisotrope Medien ..... 34

Lineare Medien ..... 34

Linienintegral ..... 3

Lorentzbeziehung ..... 33

Lorenzkurve ..... 1

### M

Magnetfeld ..... 23

Magnetostatik ..... 6

Materialgleichung ..... 24

Materialgleichungen ..... 32

Maxwell in Integralform ..... 7

Maxwellsche Ergänzung ..... 31

Methode der Bildladungen ..... 14

mittlere Geschwindigkeit ..... 24

mittlere Stoßzeit ..... 24

### N

nicht-geschlossene Flächen ..... 3

nichtstationäre Ströme ..... 31

Normalenvektor ..... 3

**O**

Oerstedtsches Gesetz in Differentialform ..... 31

**P**

Plattenkondensator ..... 11

Pointingscher Vektor ..... 34

Potential ..... 6

Potenzreihenansatz ..... 19

**Q**

Quelle ..... 4

Quellen ..... 6

**R**

Randbedingungen ..... 12, 14

Randeffekten ..... 11

regulär ..... 18

Rotation ..... 1, 5

**S**

Seperationsansatz ..... 16

skalare Potential ..... 32

Spannung ..... 11

spezifische Leitfähigkeit ..... 24

stationären Ströme ..... 31

Superpositionsprinzip ..... 6

**T**

tangential stetig ..... 10

Transversale Eichung ..... 33

**V**

Vektorpotential ..... 6, 32

Verbindungsgleichungen ..... 32

Verschiebungsstromdichte ..... 31

vollständig ..... 15

Volumenintegral ..... 3

von-Neumann-Randbedingung ..... 12

**W**

Wechselwirkungsenergie ..... 10

Wirbel ..... 6

Wirbelstärke ..... 4

**Z**

Zerlegungssatz ..... 7

Zirkulation ..... 5