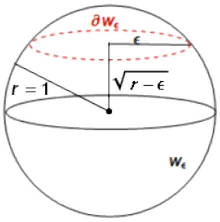
1 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 27.10.2010

1.1

a) S^2 heißt orientierbar $\Leftrightarrow \exists$ stetiges Einheitsnormalenfeld $\nu : S^2 \to \mathbb{R}^3$
Also $\forall p \in S^2 : \ ||p||_2 = 1, \ \ \nu(p) \perp T_p S^2$
Behauptung: $\nu = (x, y, z)$ ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld von S^2 auf $\mathbb{R}^3$
Beweis: Da ν die identische Abbildung der Einheitssphäre ist, entspricht die 2-Norm aller Funktionswerte von ν dem Einheitsradius, also 1.
Außerdem gilt deshalb, dass die Richtung der Vektoren, die ν annehmen kann, der eines Vektors vom Nullpunkt ausgehend zum eingesetzten Punkt p (dem Radius entlang) entspricht. $\nu(p)$ ist also 1 lang und zeigt von 0 nach p dem Radius entlang, befindet sich aber um 1 verschoben nicht am Ursprung, sondern an p. Da eine Gerade durch den Nullpunkt immer orthogonal zu den Tangentialebenen (also $T_p S^2$) an den Schnittpunkten (hier p) mit einer beliebig großen Kugel (hier r=1) steht, sind auch alle Vektoren einer Funktion (hier ν), die nur Vektoren erzeugt, die an diesen Schnittpunkten in die selbe Richtung wie die Gerade durch den Nullpunkt zeigt, orthogonal zu dem jeweiligen $T_p S^2$.
Also ist $\nu(p) \perp T_p S^2$, also stetiges Einheitsnormalenfeld. ((x,y,z) ist stetig, da Elemente stetige Funktionen)

b) Sei $w_\varepsilon = \{x \in \S^3 | x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$,
also $\tilde{\gamma} = (\varepsilon \sin(t), \varepsilon \cos(t), \alpha\sqrt{1-\varepsilon})$ mit $\alpha = \begin{cases} 1 & \varepsilon \geq 0 \\ -1 & sonst \end{cases}$ mit $t \in [0, 2\pi]$



$$\int\limits_{\partial w_\varepsilon} v d\vec{s} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{w_\varepsilon} < rotv, \nu > dS \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{S^2} < rotv, \nu > dS$$

$$\int\limits_{F} < rotv, \nu > dS = \int\limits_{I} < v(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) > dt$$

$\dot{\tilde{\gamma}} = (-\varepsilon \sin(t), \varepsilon \cos(t)), \quad v(x, y, z) = (x, y, z)$

$\Rightarrow v(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) = -e^2 \sin(t) \cos(t) + e^2 \cos(t) \sin(t) + 0 = 0$

Also $\int\limits_{I} < v(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) > dt = \int\limits_{I} 0 dt = 0$

1.2

Satz von Stokes: $\int_F < rot(v), \nu > dS = \int_{\partial F} < v, ds >$
Links:

$$rot(v) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Parametrisierung für Halbkugelschale:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin^2\varphi \\ \cos\vartheta \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_F < rot(v), \nu > dS = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin^2\varphi \\ \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta \sin^2\varphi d\varphi d\vartheta$$

$\int \sin^2\varphi d\varphi = -\sin\varphi \cos\varphi + \int \cos^2\varphi d\varphi$
$= -\sin\varphi \cos\varphi + \int 1 - \sin^2\varphi d\varphi = -\sin\varphi \cos\varphi + \int 1 d\varphi - \int \sin^2\varphi d\varphi$

$\Rightarrow \int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{-\sin\varphi\cos\varphi + \int 1 d\varphi}{2} \Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$

$\int \cos\vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta = \sin^4 \vartheta - \int 3\sin^3\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = \frac{1}{4}\sin^4\vartheta \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta\sin^3\vartheta\sin^2\varphi d\varphi d\vartheta = \frac{1}{4}\pi$

Rechts:

$\int_{\partial F} < v, ds >= \int\limits_0^{2\pi} < v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > dt$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$v(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad < v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >= -\sin t\cos^2 t + \cos^2 t \sin^2 t$

$\int -\sin t \cos^2 t dt = +\cos^3 t + \int 2\cos^3 t \sin t = \frac{1}{3}\cos^3 t$

$\int \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \sin^2(2t) = \frac{1}{8}\int^- \cos(4t)dt = \frac{1}{8}(t - \frac{1}{4}\sin(4t))$

(Verwendet: $\frac{1}{2}\sin(2x) = \sin^2 x\cos^2 x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2(2x))$)

$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} < v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > dt = \int\limits_0^{2\pi} -\sin t\cos^2 t + \cos^2 t\sin^2 t dt = \int\limits_0^{2\pi} -\sin t\cos^2 t dt + \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt$

$= [\frac{1}{3}\cos^3 t]_0^{2\pi} + [\frac{1}{8}(t - \frac{1}{4}\sin(4t))]_0^{2\pi} = 0 + \frac{\pi}{4}$

Also ergeben beide Seiten $\frac{\pi}{4}$.

1.3

$m(t) = \int\limits_V \varrho(t,x)dx \Rightarrow \dot m(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_V \varrho(t,x)dx = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,x)dx$

$\dot m(t) = -\int\limits_{\partial V} \varrho(t,x) < v(t,x), \nu > dS = -\int\limits_V div(\varrho(t,x)v(t,x))dx$

$\dot m(t) = -\int\limits_V div(\varrho(t,x)v(t,x))dx = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,x)dx \Leftrightarrow 0 = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,x)dx + \int\limits_V div(\varrho(t,x)v(t,x))dx$

Da gilt $\int\limits_V f = 0 \Rightarrow f = 0$ ist also $\frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,x) + div(\varrho(t,x)v(t,x)) = 0$

Ist nun $\varrho(x,t) = p_0$, so ist $\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$, also $div(\varrho_0 \cdot v(x,t)) = 0$

Da gilt $div(a\cdot\vec v) = a\cdot div(\vec v)$ mit $a = const \in \mathbb{R}$, ist also $\varrho_0 \cdot div(v) = 0 \Rightarrow div(v) = 0$

1.4

Wir nehmen nun an, es existiere als f(t) ein $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$ und $Bild(\gamma)$ geschlossen, also γ konstant und periodisch.

Dann gilt nach Gauß $\int\limits_K div(\gamma)dV = \int\limits_{\partial K} < \gamma, \nu > dS$

Da ν die äußere Normale von K ist und $\gamma(t)\partial K$ entlang zeigt (da γ konstant und periodisch), also in $T_\gamma(t)\partial K$ liegt, ist ν zu $\gamma(t)$ orthogonal und somit das Skalarprodukt 0.

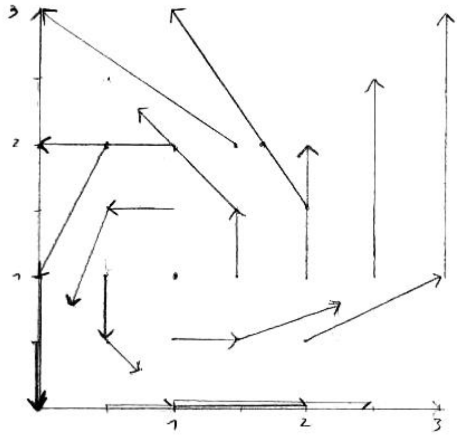
Daher ist $\int\limits_K div(\gamma(t))dV = \int\limits_{\partial K} < \gamma(t), \nu > dS = \int\limits_{\partial K} 0 dS = 0$

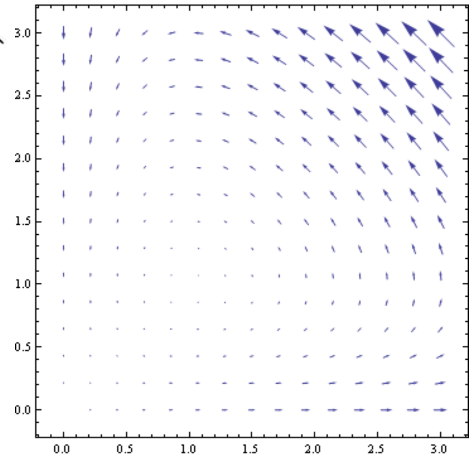
Gibt es also eine beliebige, γ-ähnliche Funktion, die als Lösung des 2-dim. Differentialgleichungssystems $\dot x(t) = f(x(t))$ in Frage kommt, so ist das Volumenintegral der Divergenz der Funktion und damit die Funktion selbst 0.

Ist also die Divergenz der Funktion ungleich 0, dann kann die Funktion nicht γ-ähnlich, also wie in Aufgabenstellung gefordert sein.

1.5

a) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$:





b) $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_x f_2 \\ \partial_y f_1 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha - y\beta & -x\beta \\ y\delta & -\gamma + x\delta \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = -\gamma$

$$J_f(\tfrac{\gamma}{\delta}, \tfrac{\alpha}{\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\alpha}{\beta}\beta & -\frac{\gamma}{\delta}\beta \\ \frac{\alpha}{\beta}\delta & -\gamma + \frac{\gamma}{\delta}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = \alpha\gamma + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -i\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{\alpha\gamma}$