

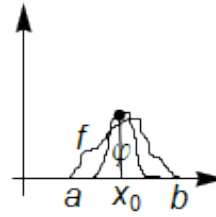
2 Hinweis zu Blatt2 zu Analysis 3

Zu 6.) $\forall \varphi \in C_c^\infty([a, b]) \int_a^b f(\varphi) dx = 0 \stackrel{!}{\Rightarrow} f = 0$

O.E. $\exists x_0 > 0$ mit $f(x_0) > 0$

Es darf benutzt werden: $\exists \varphi \in C_c^\infty([a, b]), \varphi \neq 0$

m.a.W. $C_c^\infty([a, b]) \setminus \{0\} \neq \emptyset$



Zu 5.) Beispiel 1:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = e^t x(t)^2$$

Die konstante Funktion 0 ist eine Lösung von (1). Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein off. Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (1) mit $x(0) = x_0$. Nun gibt es $\tilde{I} \subseteq I$ offene Umgebung von 0 mit $x(t) \neq 0 \quad \forall t \in \tilde{I}$, da $x \in C^1$ und damit stetig ist. Es folgt für $t \in \tilde{I}$:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} = e^t \Rightarrow \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} dt = \int_0^s e^t dt = e^s - 1$$

$$\int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} dt = \int_0^s \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{x(t)} \right) dt = \left[-\frac{1}{x(t)} \right]_0^s = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(s)} \Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(s)} = e^s - 1 \Leftrightarrow x(s) = -\frac{1}{e^s - 1 - \frac{1}{x_0}}$$

$$\text{und } s \in \begin{cases} (-\infty, \ln(1 + \frac{1}{x_0})) & , x_0 < 0 \\ (\ln(1 + \frac{1}{x_0}), \infty) & , x_0 > 0 \end{cases}$$

$$e^s - 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^s = 1 + \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow s = \ln(1 + \frac{1}{x_0})$$

$$x_0 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0} > 1 \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{x_0}) > 0$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0} < 1 \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{x_0}) < 0$$

Beispiel 2:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = 2x(t) + t$$

Lsen zuerst $\dot{x}(t) = 2x(t)$:

$x_0 = 0 \Rightarrow 0$ ist gesuchte Lösung.

$x_0 > 0 \Rightarrow x(t) > 0$ für t nahe 0.

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 2 \Rightarrow \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^s 2 dt = 2s$$

$$\int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^s \frac{d}{dt} (\ln(x(t))) dt = [\ln(x(t))]_0^s = \ln(x(s)) - \ln(x_0) = \ln\left(\frac{x(s)}{x_0}\right) = 2s$$

$\Rightarrow x(s) = x_0 e^{2s}$, $s \in \mathbb{R}$ möglich

$$x_0 < 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^s \frac{d}{dt} (\ln(|x(t)|)) dt = \ln\left(\frac{|x(s)|}{|x_0|}\right) = \ln\left(\frac{-x(s)}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{x(s)}{x_0}\right)$$

$\Rightarrow x(s) = x_0 e^{2s}$, $s \in \mathbb{R}$

Jetzt mit Variation der Konstanten x_0 :

$$x(t) = x_0(t) e^{2t} \text{ lst (2)}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (x_0(t) e^{2t}) = \dot{x}_0(t) e^{2t} + 2x_0(t) e^{2t}$$

$$\Rightarrow (\dot{x}_0(t) + 2x_0(t)) e^{2t} = \dot{x}(t) = 2x(t) + t = 2x_0(t) e^{2t} + t$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0(t) e^{2t} = t$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0(t) = \frac{t}{e^{2t}} \Rightarrow \int_0^s \dot{x}_0(t) dt = \int_0^s \frac{t}{e^{2t}} dt$$

$$\int_0^s \dot{x}_0(t) dt = x_0(s) - x_0(0), \quad \int_0^s \frac{t}{e^{2t}} dt = \int_0^s t e^{-2t} dt = [t \frac{e^{-2t}}{-2}]_0^s - \int_0^s \frac{e^{-2t}}{-2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} s e^{-2s} - \frac{1}{4} e^{-2s} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} e^{-2s} (2s + 1) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x_0(s) = -\frac{1}{4} e^{-2s} (2s + 1) + x_0(0) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x(t) = (-\frac{1}{4} e^{-2t} (2t + 1) + x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t} = -\frac{1}{4} (2t + 1) + (x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t}$$

Probe: $x(t) = -\frac{1}{4} (2t + 1) + (x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t}$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -\frac{1}{2} + 2(x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t}$$

$$2x(t) + t = -\frac{1}{2} (2t + 1) + 2(x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t} + t = -\frac{1}{2} + 2(x_0 + \frac{1}{4}) e^{2t} = \dot{x}(t)$$

$$x_0 \stackrel{!}{=} x(0) = -\frac{1}{4} + (x_0 + \frac{1}{4}) = x_0 \Rightarrow \text{Richtig}$$

Zu 3.) Setze Lösung von $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ in F ein und betrachte $F(x(t), y(t))$.

F heißt erstes Integral zu einer GDG $\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow$, wenn $[\dot{x} = f(x) \Rightarrow t \mapsto F(x(t)) \text{ konstant}]$

$$\dot{x} = -x, \dot{y} = 2y$$

(b) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erstes Int. gleichm stetig. $\Rightarrow F$ konstant

$\Rightarrow \forall$ Lösungen (x, y) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x(t), y(t)) = c \forall t \in \mathbb{R}$

$$| \underbrace{F(x_0, y_0)}_{=F(x(t), y(t))=c} - F(0) | \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists t \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$| F(x(t), y(t)) - F(0, y(t)) | < \varepsilon \text{ (nutze glm. Stetig. von } F)$$

$$| \underbrace{F(0, y(t))}_{=F(0, y(s)) \forall s \in \mathbb{R}} - F(0) |$$

$$y(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

nochmal gl. Stetigkeit von F liefert für ein $s \in \mathbb{R} |F(0, y(s)) - F(0)| < \varepsilon$

Zu 1.) $\bigcup_{i=1}^6 S_i = \partial Q$

$$\text{z.B. } S_3: \psi: [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow S^3$$

$$\psi(y, z) := (0, y, z)$$

$$\partial_y \psi(y, z) = (0, 1, 0), \quad \partial_z \psi(y, z) = (0, 0, 1), \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = 1, \quad \nu: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(p) = (1, 0, 0), \quad p \in S^3 \Rightarrow p_1 = 0$$

$$\int_{S^3} \langle \nu, \nu \rangle ds = \int_0^1 \int_0^\pi v_1(\psi(y, z)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} dz dy = \int_0^1 \int_0^\pi z^2 \cdot 1 dz dy = \frac{\pi^3}{3}$$

Zu 4.) Bsp: $\ddot{q} = -q^3$,

$$p := \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = p \stackrel{!}{=} \partial_y F(q, p),$$

$$\dot{p} = -q^3 \stackrel{!}{=} -\partial_x F(q, p)$$

$$\text{Z.B. } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} F(q, p) = \partial_x F(q, p) \dot{q} + \partial_y F(q, p) \dot{p}$$

$$= \partial_x F(q, p) \cdot p + \partial_y F(q, p) (-q^3)$$

$$= \partial_x F(q, p) \cdot \partial_y F(q, p) + \partial_y F(q, p) \cdot (-\partial_x F(q, p)) = 0$$

$$F^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$

$\Rightarrow 0$ stationär/Gleichgewicht

$$F^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) | \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\}$$

