1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 4 28.11.12

1.1 Aufgabe

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - < a_2, q_1 > q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|_2} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.7 \\ 0.5 & -0.1 \\ 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} Rx = Q^T b$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & 13/2 \\ 0 & 5 & 5/2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & 13/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x = (3/2\ ,\ 1/2)^T$$

b) 1. Mit $\tilde{A}^{(1)} = A$

$u := \frac{a_1 - \alpha e_1}{\|a_1 - \alpha e_1\|}$

$\alpha = \pm\|a_1\|_2 = \pm 2 \Rightarrow \alpha = -2$

$\Rightarrow a_1 - \alpha e_1 = (3,1,1,1)^T\ ,\quad \|a_1 - \alpha e_1\|_2 = \sqrt{12}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{12}}(3,1,1,1)^T$

Damit $H_1 = I - 2uu^T$

$$= I - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/6 & -1/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 5/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/6 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$h_1 \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 \\ 0 & 14/3 \end{pmatrix}$$

2. Mit $\tilde{A}^{(2)} = (2/3, 5/3, 14/3)^T$ folgt:

$u := \frac{a_1 - \alpha e_1}{\|a_1 - \alpha e_1\|}$

$\alpha = \pm\|a_1\|_2 = \pm 15/3 \quad \Rightarrow \alpha = -15/3$
$\Rightarrow a_1 - \alpha e_1 = (17/3, 5/3, 14/3)^T$
$\|a_1 - \alpha e_1\|_2 = \sqrt{170/3}$
$\Rightarrow u = \sqrt{3/170}(17/3, 5/3, 14/3)^T$
Damit $H_2 = I - 2uu^T$

$$= I - \frac{1}{255}\begin{pmatrix} 289 & 85 & 238 \\ 85 & 25 & 70 \\ 238 & 70 & 196 \end{pmatrix} = \frac{1}{255}\begin{pmatrix} -34 & -85 & 238 \\ -85 & 230 & -70 \\ -238 & -70 & 59 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_2\tilde{A}^{(2)} = \frac{1}{255}(-1275, 0, 0)^T = (-5, 0, 0)^T$

$$Q = H_1H_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/6 & -1/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 5/6 & -1/6 \\ -1/2 & -1/6 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & -85 & 238 \\ 0 & -85 & 230 & -70 \\ 0 & -238 & -70 & 59 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 7/10 & -5/34 & 83/170 \\ -1/2 & 1/10 & -13/34 & -131/170 \\ -1/2 & -1/10 & 29/34 & -19/170 \\ -1/2 & -7/10 & -11/34 & 67/170 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2H_1A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Löse nun die Normalengleichung:
$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow R^TRx = R^TQ^Tb$

$$\Rightarrow R^Ty = R^TQ^Tb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 13 \\ 58 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = (-13/2, -5/2, 0, 0)^T$$

Dann gilt:

$$Rx = y \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = (3/2, 1/2)^T$

1.2 Aufgabe

-2	-1	0	1	2
-0.3	0.2	0.6	0.8	3.2

$u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$
$\Rightarrow c = (c_1, c_2, c_3)^T \quad b = (-0.3, 0.2, 0.6, 0.8, 3.2)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.6 \\ 12.6 \end{pmatrix}$$

$$A^T Ac = A^T b = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 4.5 \\ 0 & 10 & 0 & 7.6 \\ 10 & 0 & 34 & 12.6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = \frac{27}{70} \quad c_2 = \frac{19}{25} \quad c_3 = \frac{9}{35}$

$\Rightarrow u(x) = \frac{27}{70} + \frac{19}{25}x + \frac{9}{35}x^2$

$$r = Ac - b = \begin{pmatrix} -37/350 \\ -41/350 \\ 27/70 \\ 491/350 \\ 1027/350 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34/175 \\ -111/350 \\ -3/14 \\ 211/350 \\ -93/350 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|r\|_2 = \sqrt{\frac{541}{875}}$

1.3 Aufgabe

Die Lösung ist eindeutig, da A vollen Rang hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Normalengleichung gilt:

$$A^T Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 12 & 6 & 1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

$= A^T(1,2,3,1,1)^T \stackrel{!}{=} A^T b$

Damit gilt:

$$\tilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 30 & 90 & -30 \\ 90 & 271 & -90 \\ -30 & -90 & 60 \end{pmatrix} \quad \tilde{b}^{(0)} = (21, 64, -24)^T.$$

Gauß-Elimination:

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 30 & 90 & -30 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b}^{(1)} = (21, 1, -3)^T \qquad \Rightarrow x = (-12/5, 1, 1/10)^T$$

wegen: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12/5 \\ 1 \\ -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist $\tilde{x}$ sogar Lösung der eigentlichen Gleichung.

D.h. hier: $\tilde{x} = x$

Wir wissen bereits, dass $rang(A) = 3$. Da $[A|b]$ mit $b = (1, 1, 1, 1, 1)^T$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 1 \\ 4 & 12 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -18/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \vdots & 1 \\ \vdots & -2 \\ \vdots & -1 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 11 \end{array}\right)$$

hat $[A|b]$ Rang 4, d.h. für dieses b gibt es keine Lösung im eigentlichen Sinn.

Es wäre nämlich in diesem Fall

$A^T b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -6/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

aber: $A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 16/3 \\ 8/3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq b$

1.4 Präsenzaufgabe

Anmerkungen

Inverse Iteration:

Ist λ eine Näherung eines beliebigen einfachen EW λ_j von A, dann gilt, dass

$$|\lambda - \lambda_j| < |\lambda - \lambda_k| \text{ für } k \neq j$$

Dann ist

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda_j - 1}$$

des betragsgrößten EW von $(A - \lambda I)^{-1}$ und die Potenzmethode liefert μ_j

Allerdings invertiert man in den meisten Fällen die Matrix A nicht, sondern löst stattdessen folgendes LGS (z.B. mit Gauß):

$$(A - \lambda I)x^{(k+1)} = x^{(k)}$$

Analog zur Potenzmethode ist es empfehlenswert, zu normieren:

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}\ , \quad (A - \lambda I)x^{(k+1)} = y^{(k)}$$

Deflation:

Seien $\lambda_1,\ \omega_1$ EW bzw. EV einer Matrix A. Deflation bedeutet, dass wir den EW λ_1 abspalten. Dazu suchen wir eine nicht-sing. Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & - & - & - \\ \vdots & | & B & | \\ 0 & - & - & - \end{pmatrix}$$

d.h. wir führen eine Ähnlichkeitstransformation durch, wobei $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und $\sigma(B) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_1\}$

Dabei hat SAS^{-1} die gewünschte Form, falls $S\omega_1$ ein Vielfaches von $e_1 = (1, 0, ..., 0)^T$ ist.

1. Ein geeignetes S kann durch Householder-Transformation konstruiert werden; es gilt:
   $H = H^{-1} = I - 2uu^T$ mit $u = \frac{\omega_1 - \alpha e_1}{\|\omega_1 - \alpha e_1\|_2}$ und $\alpha = \pm\|\omega_1\|$
2. Es sei $\omega_1 = (\tilde{\omega}_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\tilde{\omega}_1 \neq 0$:
   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   Zur gleichzeitigen Abspaltung mehrerer EW $\Rightarrow$ Blockdeflation