

2 Besprechung zu Blatt2 zu Analysis 3

Beispiele zu ersten Integral

Erstes Integral allgemein: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

(P): $\dot{x}(t) = f(x(t))$ gew. DGL.

Erstes Integral: $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x$ ist Lösung von (P) gilt: $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n, I \in \mathbb{R}$

$F(x(t)) = c \forall t \in I$

Immer erstes Integral: $F(x, y) = c$

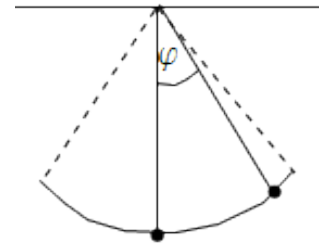
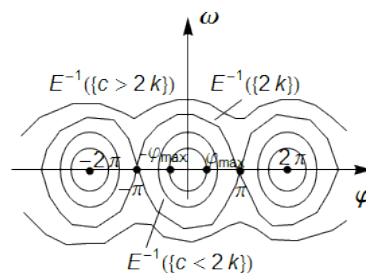
$\ddot{\varphi} = -\kappa \sin(\varphi(t))$

(P) =
$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) = -\kappa \sin(\varphi(t)) \end{cases}$$

Beh: $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E(x, y) := \frac{y^2}{2} + \kappa(1 - \cos(x))$ ist ein erstes Integral von (P).

(Nach Frage: Wie kommt man auf E? siehe StudIp, $\ddot{q} = -q^3$)

Brauchen jetzt die Lösungen φ, ω , haben aber leider keine Zeit, um diese zu berechnen



$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}, x(t) = x_0 e^{-t}, y(t) = y_0 e^{2t}$$

Beh: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) := x^2 y$ ist ein erstes Integral von (P)

Bew: $F(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t})^2 (y_0 e^{2t}) = x_0^2 y_0$ konstant

$\Rightarrow F$ ist erstes Integral von (P)

Bem: F ist nicht konstant. Das ist kein Widerspruch zu 2b), da F nicht glm stetig.

2.3

a) *
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \Rightarrow x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = x_0 \cdot e^{-t} \\ \dot{y} = 2y \Rightarrow y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(t) = y_0 \cdot e^{2t} \end{cases}$$

b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral von (*) und gleichm stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 < \delta$

Behauptung: Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist $|F(x_0, y_0) - F(0, 0)| < \varepsilon$

Beweis:
$$\underbrace{|F(x_0, y_0) - F(0, 0)|}_{=F(x(t), y(t))} \underbrace{=}_{\forall x \in \mathbb{R}} |F(x(t), y(t)) - F(0, 0)|$$

Gilt $x(t) = x_0 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Es folgt die Existenz eines $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x(t_1)| < \delta$.

Dann ist $\|(x(t_1), y(t_1)) - (0, y(t_1))\|_2 = |x(t_1)| < \delta$

$\Rightarrow |F(x(t_1), y(t_1)) - F(0, y(t_1))| < \varepsilon$

$\Rightarrow |F(x_0, y_0) - F(0, 0)| \leq \varepsilon + |F(0, y(t_1)) - F(0, 0)|$ ($F(0, y(t_1)) = F(0, y(t)) \forall t \in \mathbb{R}$, da $(0, y)$ Lös. von (*) ist.

Da $y(t) = y_0 e^{2t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ gibt es ein $t_2 \in \mathbb{R}$ mit $|y(t_2)| < \delta$.

Es folgt wie eben $\|(0, y(t_2)) - (0, 0)\|_2 < \delta$ und damit $|F(0, y(t_2)) - F(0, 0)| < \varepsilon$.

Insgesamt erhalten wir $|F(x_0, y_0) - F(0, 0)| < 2\varepsilon$ und damit $F(x_0, y_0) = F(0, 0)$

2.2

$\alpha = \arctan(\sqrt{\kappa})$

2.4

$$\text{a) } \dot{x}(t) = \underbrace{\lambda}_{a(t)} x(t) + \underbrace{\sin(t)}_{h(t)}, x(0) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} h(s) ds$$

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(r) dr\right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right) h(s) ds$$

$$\Rightarrow x(t) = 0e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \sin(s) ds = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} \sin(s) ds$$

$$\lambda \neq 0 : \int e^{-\lambda s} \sin(s) ds = \left[\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s) \right] - \int \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} \cos(s) ds$$

$$= \left[\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s) \right] + \left[\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda^2} \cos(s) \right] - \frac{1}{\lambda^2} \int e^{-\lambda s} \sin(s) ds$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)}_{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}} \int e^{-\lambda s} \sin(s) ds = \underbrace{\left[\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s) + \frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda^2} \cos(s) \right]}_{-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^2} (\lambda \sin(s) + \cos(s))}$$

$$\int e^{-\lambda s} \sin(s) ds = -\frac{1}{\lambda^2+1} [e^{-\lambda s} (\lambda \sin(s) + \cos(s))]$$

$$\Rightarrow x(t) = -e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda^2+1} [e^{-\lambda s} (\lambda \sin(s) + \cos(s))]_0^t$$

$$= -e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda^2+1} (e^{-\lambda t} (\lambda \sin(t) + \cos(t)) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+1})$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2+1} (\lambda \sin(t) + \cos(t)) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+1}$$

$$\text{b) } \dot{x}(t) = \sin(t)x(t), x(0) = 1$$

$$\text{Mit 3.4: } x(t) = \exp\left(\int_0^t \sin(r) dr\right) x_0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \sin(r) dr\right) 0 ds$$

$$= \exp\left([\cos(r)]_0^t\right) + 0 = \exp(1 - \cos(t))$$

Andere Möglichkeit (ohne Formel, nur rechnen):

$$x(0) = 1 \Rightarrow r \text{ nahe } 0 \text{ ist } x(r) \neq 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}(r)}{x(r)} = \sin(r)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \underbrace{\frac{\dot{x}(r)}{x(r)}}_{\frac{d}{dr} \ln(x(r))} dr = \int_0^t \sin(r) dr$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(r)}{x(r)} dr = \ln(x(t)) - \underbrace{\ln(x(0))}_0 = \ln(x(t))$$

$$= \int_0^t \sin(r) dr = 1 - \cos(t)$$

$$\Rightarrow \ln(x(t)) = 1 - \cos(t) \Rightarrow x(t) = \exp(1 - \cos(t))$$