2 Übungsblatt von Analysis 3 zum Mittwoch, den 10.11.2010

2.1

$I_{x_0}?,\ I_{\pi(t,x_0)}?$

2.2

$\dot{x}(t) = ax(t) + h(t),\ x(0) = c(0)$
Allgemeine Lösung für $\dot{x}(t) = ax(t),\ x(0) = c(0) \Rightarrow x(t) = c \cdot exp(at)$
Wäre nun $x(t) = c(t)exp(at)$ Lösung der DGL, dann gilt:
$ax(t) + h(t) = \dot{x}(t) = ac(t)exp(at) + \dot{c}(t)exp(at)$
$\Rightarrow \dot{c}(t) = h(t)exp(-at)$
Nach HDI: $c(t) = c(0) + \int\limits_0^t exp(-as)h(s)ds$
$\Rightarrow x(t) = c(t)exp(at) = exp(at)\left(c(0) + \int\limits_0^t exp(-as)h(s)ds\right)$

2.3

a) $\ddot{x} = (\dot{x})^{\cdot} = (\dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi))^{\cdot}$
$= \ddot{r}\cos(\varphi) - \dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi) - \dot{r}\dot{p}\sin\varphi) - r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi)$
$(1_1) : \ddot{x} + \gamma M \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
$\Rightarrow \ddot{r}\cos(\varphi) - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi) - r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2}\cos(\varphi) = 0$
$\ddot{y} = (\dot{y})^{\cdot} = (\dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi))^{\cdot}$
$= \ddot{r}\sin(\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \dot{r}\dot{p}\cos(\varphi) + r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$
$(1_2) : \ddot{y} + \gamma M \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
$\Rightarrow \ddot{r}\sin(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2}\sin(\varphi) = 0$
$(1_1)\cos(\varphi) + (1_2)\sin(\varphi)$
$= \ddot{r}\cos^2(\varphi) + \ddot{r}\sin^2(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2}\cos^2(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2}\sin^2(\varphi)$
$= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0$
$-(1_1)\sin(\varphi) + (1_2)\cos(\varphi)$
$= 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos^2(\varphi) + r\ddot{\varphi}\sin^2(\varphi) + r\ddot{\varphi}$
$cos^2(\varphi)$
$= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$

b) Konstant $\Rightarrow$Ableitung $= 0$
$\frac{d}{dt}(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2}}) =$
$\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{\gamma M}{2(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot (2x + 2y) =$
$\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{\gamma M(x+y)}{2(x^2+y^2)^{3/2}} = \ddot{x} + \frac{\gamma M(x)}{2(x^2+y^2)^{3/2}} + \ddot{y} + \frac{\gamma M(y)}{2(x^2+y^2)^{3/2}} = (1_1) + (1_2) = 0$
$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 2\dot{r}r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = (2\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi})r = (2_2)r = 0r = 0$

2.4

$v_{sg} = v_2 + \frac{x}{l}v_1,\ l = A + v_1 t, x(0) = 0$
sg:Schnecke gesamt, 2:Schnecke auf Seil, 1:Pferd gesamt
$x_{sg}(t) = \int\limits_0^t (Exp(\frac{v_1}{A+v_1 t})dt) \cdot 0 + \int\limits_0^t Exp(\int\limits_s^t \frac{v_1}{A+v_1 r}dr)v_2 ds$

$= \int_0^t Exp(Ln(A+v_1t) - Ln(A+v_1s))v_2 ds = \int_0^t (Ln(A+v_1t) - Ln(A+v_1s))v_2 ds =$
$([sLn(A+v_1t)]_0^t + [-Ln(A+v_1s) + \frac{ALn[A+v_1S]}{v_1} + xLn(A+v_1S)]_0^t)v_2$
$= (\frac{A(Ln(A+tv_1)-Ln(A))}{v_1} + t)v_2$
$v_{sg} = (1 + \frac{A}{(A+tvp)})v_2 \sim (1+\frac{1}{t})v_2$, also wächst die Geschwindigkeit mit der Zeit, die des Pferdes bleibt aber konstant. Damit holt die Schnecke das Pferd ein.

2.5

$\dot{x} = x(1-x) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x} = 1 - x \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x^2} = (-\frac{1}{x})^{\cdot} = \frac{1}{x} - 1$
$\Rightarrow (\frac{1}{x})^{\cdot} + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow (\frac{1}{x}) = a_0e^{-t} + 1$
$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{a_0e^{-t}+1}$
$x_0 = \frac{1}{a_0+1} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{x_0} - 1$
$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{(\frac{1}{x_0}-1)e^{-t}+1} = \frac{x_0}{(1-x_0)e^{-t}+x_0}$
Das Intervall schließt das t aus, für das der Nenner 0 wird, also
$(1-x_0)e^{-t_0} + x_0 = 0 \Rightarrow \frac{-x_0}{1-x_0} = e^{-t_0} \Rightarrow t_0 = -Ln(\frac{-x_0}{1-x_0})$
Nähert man sich diesem t_0, so gleicht das Verhalten dem von $\frac{1}{1-e^{-t}}$, geht also von t von oben gegen t_0^+ gegen ∞, für t von unten gegen t_0^- gegen $-\infty$.

2.6

Für $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0,\ \varphi(0) = 0,\ \dot{\varphi}(0) = 0$ wäre $\varphi(t) = 0$ eine Lösung.
Damit ergibt sich für $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0$ dann $\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}$.
Damit schließt das Existenzintervall den Fall $r = 0$ aus, da dann $\ddot{r} \to \infty$
Da die Anfangsbedingung $r(0) = 1$, ist $\ddot{r}(0) = -\gamma M$, also negativ.
Da $\dot{r}(0) = 0$ negative Ableitung hat, wird es für steigende t geringer (negativ steigend).
Durch negative Ableitung $r'(t)$ mit $t > 0$ wird auch $r(t)$ mit steigendem t geringer (vom Betrag kleiner), wodurch $\ddot{r}(t)$ immer negativer wird, bis der Grenzfall $r = 0$ erreicht ist. Daher ist diese Lösung zu den genannten Anfangsbedingungen nur zeitlich nach oben beschränkt mglich.
Physikalisches Phänomen: Planet stützt in anderen (grob) bzw. Raketenabsturz (genauer) bzw. senkrechter Wurf ab Umkehrpunkt (eher realistisch)