1 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 3.11.2009

1.1

a) Reflexivität: aRa:
$(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ab$
Symmetrik:
$(c, d) \sim (a, b) \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d)$
Transitivität:
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$
$(c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow cf = de \Leftrightarrow (c, d) = (e, f)$
$\Leftrightarrow (a, b) = (e, f) \Leftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$
Bewiesen!

b) Wenn $(a, b) \sim (w, x)$ und $(c, d) \sim (y, z)$, dann gilt
   1. $(a/b) + (c/d) \sim (w/x) + (y/z) \Leftrightarrow (ad + bc, bd) \sim (wz + xy, xz)$
   2. $(a, b) \cdot (c, d) \sim (w, x) \cdot (y, z) \Leftrightarrow (ac, bd) \sim (wy, xz)$

1.2

Eine Menge ist ein Körper, sofern für eine Addition und eine Multiplikation Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz gelten und es neutrale/inverse Elemente gibt.

Assoziativ: $(a, b)+((c, d)+(e, f)) = (a, b)+(cf+de, df) = (adf+bcf+bde, bdf) = (ad + bc, bd) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$

$(a, b)\cdot((c, d)\cdot(e, f)) = (a, b)\cdot(ce, df) = (ace, bdf) = (ac, bd)\cdot(e, f) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f)$

Kommutativ: $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) = (cb + da, db) = (c, d) + (a, b)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) = (ca, db) = (c, d) \cdot (a, b)$

Distributiv: $(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (cf + de, df) = (acf + ade, bdf) = (ac, bd) + (ae, bf) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$

Neutrales Element: (Für $x \neq 0$)

$(a, b) + (0, x) = (ax + b0, bx) = (ax, bx) = (a, b)$ $\Rightarrow$Neutr. bezgl. Add: $(0, x)$

$(a, b) \cdot (x, x) = (ax, bx) = (a, b)$ $\Rightarrow$Neutr. bezgl. Mult: (x, x)

Inverses Element: $(a, b) + (-a, b) = (-ab + ab/bb) = 0$

$(a, b) \cdot (b, a) = (ab, ab) = 1$

1.3

$$
\begin{array}{ll}
|a+b| =< |a|+|b| & \\
\text{Fall } 1: a \geq 0, b \geq 0: & |a+b| \leq a+b \\
\text{Fall } 2: a \geq 0, b < 0: & |a-b| \leq a+b \\
\text{Fall } 3: a < 0, b \geq 0: & |b-a| = |a-b| (\text{siehe Fall } 2) \\
\text{Fall } 4: a < 0, b < 0: & |-a-b| = |a+b| (\text{siehe Fall } 1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
|a-b| \leq |a|+|b| & \\
\text{Fall } 1: a \geq 0, b \geq 0: & |a-b| \leq a+b \\
\text{Fall } 2: a \geq 0, b < 0: & |a+b| \leq a+b \\
\text{Fall } 3: a < 0, b \geq 0: & |a+b| \leq b+a \\
\text{Fall } 4: a < 0, b < 0: & |a-b| \leq a+b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
||a|-|b|| \leq |a+b| & \\
\text{Fall } 1: a \geq 0, b \geq 0: & |a-b| \leq |a+b| \\
\text{Fall } 2: a \geq 0, b < 0: & |a-b| \leq |a-b| \\
\text{Fall } 3: a < 0, b \geq 0: & |a-b| \leq |b-a| \\
\text{Fall } 4: a < 0, b < 0: & |a-b| \leq |a+b|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
||a|-|b|| \leq |a-b| & \\
\text{Fall } 1: a \geq 0, b \geq 0: & |a-b| \leq |a-b| \\
\text{Fall } 2: a \geq 0, b < 0: & |a-b| \leq |a+b| \\
\text{Fall } 3: a < 0, b \geq 0: & |a-b| \leq |b-a| \\
\text{Fall } 4: a < 0, b < 0: & |a-b| \leq |a+b|
\end{array}
$$

1.4

Man bilde für $(x-\frac{1}{n})^3 > a$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x, a > 0$ und $x^3 > a$ den Grenzwert für n gegen unendlich. Daraus folt, dass $\lim n \to \inf (x-\frac{1}{n})^3 \Rightarrow (x)^3$. Da wir nun definiert haben, dass $x^3 > a$, ist, sofern man n nur groß genug wählt, $(x-\frac{1}{n})^3 > a$.

Alternativ dazu benutze man den Satz über die Eindeutigkeit m-ter Wurzeln:

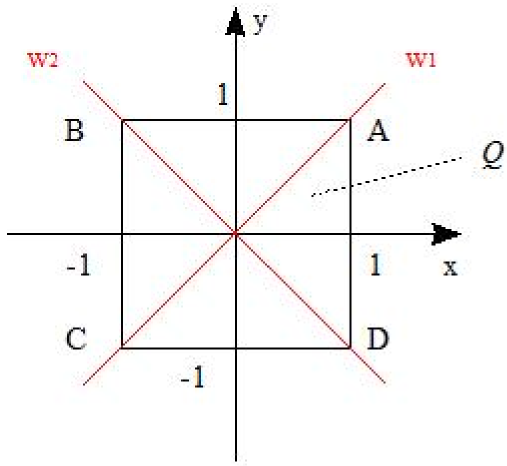
$(x-\frac{1}{n})^3 > a \Leftrightarrow x-\frac{1}{n} > a^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < x - a^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{x-a^{\frac{1}{3}}}$

Nach dem archimedischen Axiom gilt, dass es ein n geben muss, das groß genug ist, um größer als der rechte Teil zu sein, da der rechte Teil durch die Startbedingung, dass $x^3 > a$, bzw $x > a^{\frac{1}{3}}$ ist, zwangsläufig positiv sein muss.

1.5



a) *Bewegungen*, die Q in sich selbst abbilden:

Drehungen um Ursprung (mit Rechtssinn) ↻	Spiegelungen
Drehung um 90° : δ_1	Spiegelung an x1 : σ_1
Drehung um 180° : δ_2	Spiegelung an y1 : σ_2
Drehung um 270° : δ_3	Spiegelung an w_1 : σ_3
Drehung um 360° : δ_{id}	Spiegelung an w_2 : σ_4

Im Folgenden seien die Ecken des Quadrats mit den Buchstaben A, B, C und D versehen um besser zu beobachten wie die Bewegungen aus D_4 es verändern (beginnend mit A im ersten Quadranten, B im zweiten, usw.). Die Zeichenfolge ABCD stellt das Original-Quadrat Q dar (Reihenfolge und Drehsinn beachten!). Die Bewegungen und Spiegelungen liefern:

$$\delta_1 : \begin{pmatrix} ABCD \\ DABC \end{pmatrix} = DABC \qquad \sigma_1 : \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix} = DCBA$$

$$\delta_2 : \begin{pmatrix} ABCD \\ DABC \end{pmatrix} = CDAB \qquad \sigma_2 : \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix} = BADC$$

$$\delta_3 : \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix} = BCDA \qquad \sigma_3 : \begin{pmatrix} ABCD \\ ADCB \end{pmatrix} = ADCB$$

$$\delta_{id} : \begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix} = ABCD \qquad \sigma_4 : \begin{pmatrix} ABCD \\ CBAD \end{pmatrix} = CBAD$$

Die Bewegungsgruppe D_4 hat also 8 Elemente:

$$D_4 = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$$

Julian Bergmann
Florian Greiner
Timo Grosch
Julia Welsch

b) *Verknüpfungstafel.* Zeige D_4 Gruppe. D_4 kommutativ?

$\alpha \circ \beta$	δ_{id}	δ_1	δ_2	δ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
δ_{id}	δ_{id}	δ_1	δ_2	δ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
δ_1	δ_1	δ_2	δ_3	δ_{id}	σ_3	σ_4	σ_2	σ_1
δ_2	δ_2	δ_3	δ_{id}	δ_1	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
δ_3	δ_3	δ_{id}	δ_1	δ_2	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_4	σ_2	σ_3	δ_{id}	δ_2	δ_3	δ_1
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	σ_4	δ_2	δ_{id}	δ_1	δ_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_4	σ_2	δ_1	δ_3	δ_{id}	δ_2
σ_4	σ_4	σ_2	σ_3	σ_1	δ_3	δ_1	δ_2	δ_{id}

Zu zeigen: D_4 ist mit $\circ$ (Hintereinanderausführung als Verknüpfung) eine Gruppe.

1. *Abgeschlossenheit*

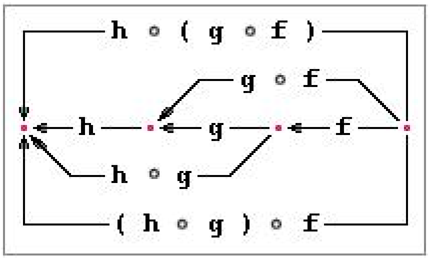
   Die Menge aller Kongruenzabbildungen eines Quadrats ist abgeschlossen bzgl. $\circ$ (wie man auch der Verknüpfungstafel entnehmen kann), d.h. $\forall \alpha, \beta \in D_4 : \alpha \circ \beta \in D_4$

2. *Assoziativität*

   Die Komposition von Abbildungen ist immer assoziativ, weil das Assoziativgesetz für jedes Element aus dem Wertebereich gilt. Seien $f : D_4 \to D_4, g : D_4 \to D_4$ und $h : D_4 \to D_4$ und sei $\alpha \in D_4$

   $$(h \circ (g \circ f))(\alpha) = h \circ (g \circ f)(\alpha) = h \circ g(f(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$$
   $$= (h \circ g)(f(\alpha)) = (h \circ g) \circ f(\alpha) = ((h \circ g) \circ f)(\alpha) \ .$$

   Damit folgt $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma \forall \alpha, \beta\gamma \in D_4$.

3. *Neutrales Element*

   Wie man der Verknüpfungstafel entnehmen kann, gibt es ein neutrales Element bzgl. $\circ$ in D_4. Für $\alpha \in D_4$ gilt (wobei δ_{id} die Drehung von 360° um den Ursprung ist): $\alpha \circ \delta_{id} = \delta_{id} \circ \alpha = \alpha$.

4. *Inverses Element*

   Auch hier kann man der Verknüpfungstafel entnehmen, dass jedes $\alpha \in D_4$ ein inverses Element $\alpha' \in D_4$ hat, so dass gilt: $\alpha' \circ \alpha = \alpha \circ \alpha' = \delta_{id}$.

   Also ist $(D_4, \circ)$ eine Gruppe.

   D_4 ist nicht abelsch, denn z.B. $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \delta_1 \neq \delta_3 = \sigma_3 \circ \sigma_2$.