

1 Besprechung zu Blatt3 zu Analysis 3

Aufgabe 1

Sei $t \in I_{x_0}$

Z.z. $\forall s \in I_{\phi(t, x_0)}, s \geq 0$ gilt $s + t \in I_{x_0}$ und $\phi(s + t, x_0) = \phi(s, \phi(t, x_0))$

Beh. χ ist eine Lösung von $\dot{x} = f(x), \chi(0) = x_0$

$J_t = \{s \in I_{x_0} | s \geq t\} \cup \{s \in \mathbb{R} | s > t, s - t \in I_{\phi(t, x_0)}\}$

$\chi : J_t \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\chi(s) = \begin{cases} \phi(s, x_0) & , s \leq t \\ \phi(s - t, \phi(t, x_0)) & , s > t \end{cases}$$

Für $s \neq t, s \in J_t$ gilt:

$$s < t : \dot{\chi} = \dot{\phi}(s, x_0) = f(\phi(s, x_0)) = f(\chi(s))$$

$$s > t : \dot{\chi}(s) = \frac{d}{ds}(\phi(s - t, \phi(t, x_0))) = \dot{\phi}(s - t, \phi(t, x_0)) = f(\phi(s - t, \phi(t, x_0))) = f(\chi(s))$$

$$\text{Sei } h > 0: \frac{1}{h}(\chi(t + h) - \chi(t)) = \frac{1}{h}(\underbrace{\phi(t + h - t, \phi(t, x_0))}_{>t(*)} - \phi(t, x_0))$$

(*) da h klein ist, $t + h \in I_{\phi(t, x_0)}$

$$= \frac{1}{h}(\phi(h, \phi(t, x_0)) - \phi(0, \phi(t, x_0))) \xrightarrow{0 < h \rightarrow 0} \dot{\phi}(0, \phi(t, x_0)) = f(\phi(0, \phi(t, x_0))) = f(\phi(t, x_0))$$

$$\text{Sei } h < 0: \frac{1}{h}(\chi(t + h) - \chi(t)) = \frac{1}{h}(\phi(t + h, x_0) - \phi(t, x_0)) \xrightarrow{0 > h \rightarrow 0} \dot{\phi}(t, x_0) = f(\phi(t, x_0))$$

$\Rightarrow \chi$ ist in t differenzierbar mit $\dot{\chi}(t) = f(\phi(t, x_0)) = f(\chi(t))$.

Insgesamt $\chi \in C^1$ mit $\dot{\chi}(s) = f(\chi(s)) \forall s \in J_t$

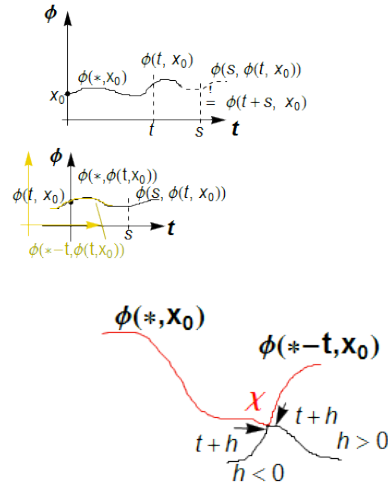
Dann ist χ eine Lösung von $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ (Genauso $\phi(x_0)$)

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt: $J_t = I_{x_0}$ und $\chi(s) = \phi(s, x_0) \forall s \in I_{x_0}$

Sei $s \in I_{\phi(t, x_0)}, s \geq 0$

$$\Rightarrow t + s \in J_t = I_{x_0}$$

$$\text{und } \phi(t + s, x_0) = \chi(t + s, x_0) = \phi(t + s - t, \phi(t, x_0)) = \phi(s, \phi(t, x_0)) \text{ und } \phi(t + s, x_0) = \chi(t + s, x_0) = \phi(t + s - t, \phi(t, x_0)) = \phi(s, \phi(t, x_0))$$



Aufgabe 6

$$(P) \begin{cases} r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Vermutung: $\phi(t) = 0$, da $\phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0$

Es gibt die Lösung $\ddot{r} + \frac{\gamma M}{r^2} = 0, r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = R, \dot{R} = \ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}$$

2 Gleichungen 1. Ordnung (erste Ableitung) (System hat eine eindeutige Lösung)

Dieses r und $\phi = 0$ ist dann die Lösung des Systems (P)

Bisherige Überlegung liefert bis hierhin dass es reicht

$\dot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}, r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0$ zu betrachten.

$$r(0) = 1, r \in C^2 \text{ mit } \ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2} \Rightarrow r(t) \neq 0 \forall t \in I \quad (r : I \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow r(t) > 0 \forall t \in I, \ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2} < 0$$

$\Rightarrow \dot{r}$ ist streng monoton fallend.

$$\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \dot{r}(t) < 0 \forall t > 0, t \in I$$

$\Rightarrow r$ streng monoton fallend in $I \cap (0, \infty) \Rightarrow$ in $I \cap [0, \infty)$, da r stetig

$$r(0) = 1 \Rightarrow r(t) < 1 \forall t \in I \cap [0, \infty)$$

$$\Rightarrow \dot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r(t)^2} \leq -\gamma M \forall t \in I \cap [0, \infty)$$

$$\Rightarrow (\text{da } t \geq 0) \dot{r}(t) = \dot{r}(0) + \int_0^t \ddot{r}(s) ds = \int_0^t \ddot{r}(s) ds \geq -t\gamma M$$

$$\Rightarrow r(t) = r(0) + \int_0^t \dot{r}(s) ds = 1 + \int_0^t \dot{r}(s) ds \leq 1 - \gamma M \int_0^t s ds = 1 - \frac{\gamma M}{2} t^2 > 0$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\gamma M}{2} t^2 \Rightarrow t < \sqrt{\frac{2}{\gamma M}}$$