4 Übungsblatt von Analysis 3 zum Mittwoch, den 17.11.2010

4.1

Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} mit \alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Riccati: $\dot{q}(t) = a(t)q(t) + b(t)q(t)^2 + k(t)$

$q(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)}, \quad \dot{q}(t) = \frac{(t)x_1(t)x_2(t) - x_1(t)(t)x_2(t)}{x_2(t)^2}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) = \alpha(t)x_1(t) + \beta(t)x_2(t) \\ \gamma(t)x_1(t) + \delta(t)x_2(t) \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \dot{q}(t) = \frac{1}{x_2(t)^2}((\alpha(t)x_1(t) + \beta(t)x_2(t))x_2 - (\gamma(t)x_1(t) + \delta(t)x_2(t))x_1)$

$= \frac{1}{x_2(t)^2}(\alpha(t)x_1(t)x_2(t) + \beta(t)x_2(t)^2 - \delta(t)x_1(t)x_2(t) - \gamma(t)x_1^2)$

$= \frac{\alpha(t)x_1(t)}{x_2(t)} + \beta(t) - \frac{\delta(t)x_1(t)}{x_2(t)} - \frac{\gamma(t)x_1(t)^2}{x_2(t)^2}$

$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = q(t) \ \Rightarrow \dot{q}(t) = \alpha(t)q(t) + \beta(t) - \delta(t)q(t) - \gamma(t)q(t)^2$

$\mu(t) := \alpha(t) - \delta(t)$

$\Rightarrow \dot{q}(t) = \mu(t)q(t) - \gamma(t)q(t)^2 + \beta(t)$

Also wie gefordert.

4.2

Ist $f(x)$ $(x \mapsto y)$ eine Funktion, so streckt „$\lambda f(x)$“ $f(x)$ in Richtung der y-Achse um das λ-fache. Damit ist $max(\lambda f(x)) = \lambda(max(f(x)))$
„$f(\lambda x)$“ staucht dagegen in Richtung der x-Achse um das λ-Fache, da jeder x-Wert nun ein y liefert, das im Vergleich zur alten Funktion $f(x')$ an dem x' steht, für welches gilt $x' = \lambda x$.
Für eine periodische Funktion gilt also, dass $\lambda(f(x))$ lediglich die Amplitude erhöht, während $f(\lambda x)$ die Eingabe vergrößert, also die x-Position der Funktionswerte staucht. Also ist der x-Abstand zweier y-Werte der alten Funktion $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ mit der neuen Funktion das $\frac{1}{\lambda}$-Fache des x-Abstandes der Alten Funktion. Ist also bei periodischen Lösungen $y_1 = y_2$ mit Periode T, so ist bei $f(\lambda x)$ die Periode λT.
Also folgt, $R(t) := \lambda r(\lambda^{-3/2}t)$ streckt $r(t)$ um λ in y-Richtung, also $R_{max} = \lambda r_{max}$. Da r periodische Lösung wird die ursprüngliche Periode also um $\lambda^{-3/2}$ gestaucht, also $\tau = \lambda^{3/2}T$

$\Rightarrow \lambda = \frac{R_{max}}{r_{max}} = (\frac{\tau}{T})^{2/3}$

$\Rightarrow (\frac{R_{max}}{r_{max}})^3 = (\frac{\tau}{T})^2$

$\Rightarrow \frac{R_{max}^3}{\tau^2} = \frac{r_{max}^3}{T^2}$

4.3

4.4

i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2$

$$\Rightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} exp(-t) & 0 & 0 \\ 0 & exp(3t) & 0 \\ 0 & 0 & exp(-2t) \end{pmatrix}$$

ii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 1$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{12} = \pm i$$

$$\Rightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & exp(t) \end{pmatrix}$$

iii) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = -1$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 9 = 13 - 4\lambda + \lambda^2$$

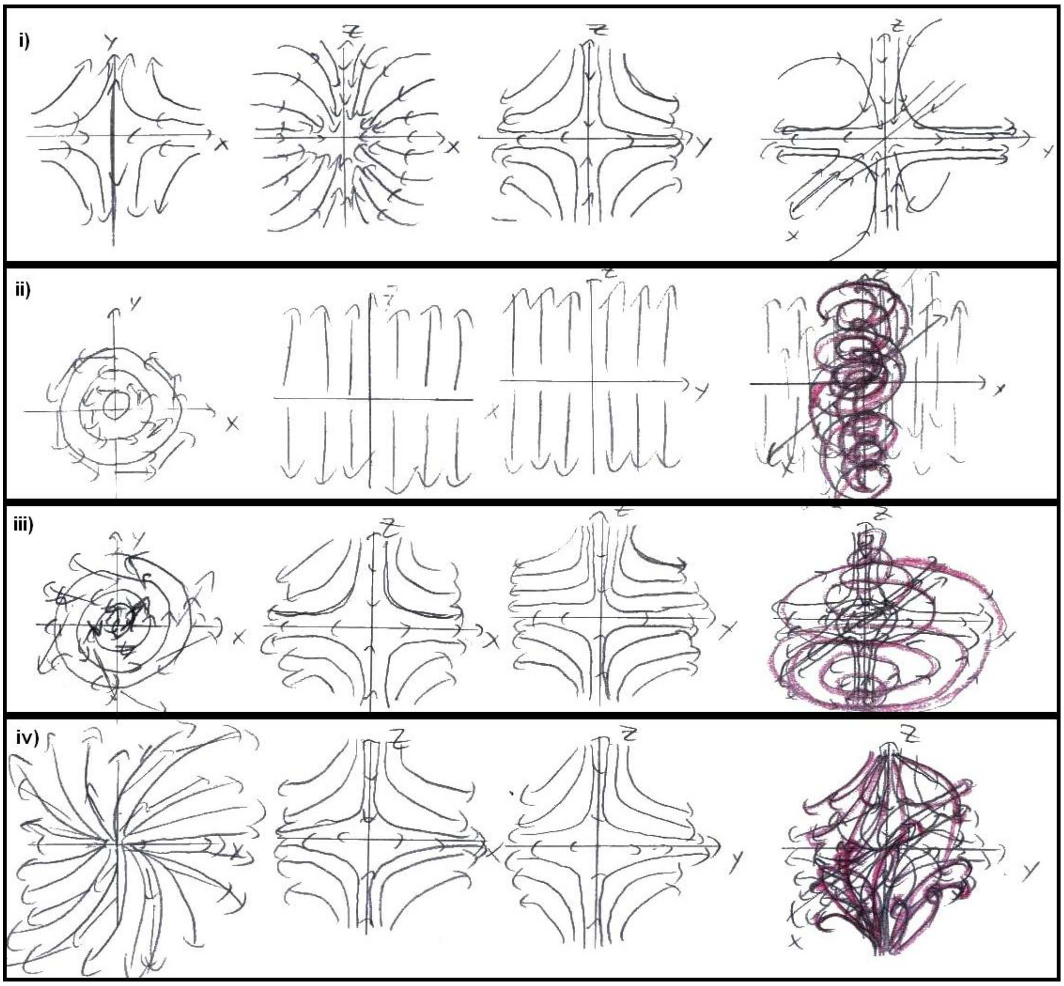
$$\Rightarrow \lambda_{12} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

$$\Rightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} exp(2t)\cos(3t) & -exp(2t)\sin(3t) & 0 \\ exp(2t)\sin(3t) & exp(2t)\cos(3t) & 0 \\ 0 & 0 & exp(-t) \end{pmatrix}$$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = -1$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{12} = 2$$

$$\Rightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & exp(2t) & 0 \\ 0 & 0 & exp(-t) \end{pmatrix}$$



4.5