

4 Besprechung zu Blatt 4 zu Analysis 3

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D+N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$De_3 = 3e_3$$

$$Ne_3 = 0$$

$$Ne_4 = e_3$$

$$Ne_5 = e_4$$

$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 an n-ter Stelle)

λ EW festgewählt $\Rightarrow \exists (v_1, \dots, v_k)$ Basis von G_λ mit

$$Nv_i = v_{i-1}, i = 1, \dots, k, v_0 = 0$$

$$v \in G_\lambda \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \text{ mit } v = \sum_{i=1}^k a_i v_i$$

$$DNv = DN \sum a_i v_i = \sum a_i DNv_i = \sum a_i Dv_{i-1} = \sum a_i \lambda v_{i-1}$$

$$NDv = ND \sum a_i v_i = \sum a_i NDv_i = \sum a_i N\lambda v_i = \sum a_i \lambda Nv_i = \sum \lambda a_i v_{i-1}$$

$$\Rightarrow \forall v \in G_\lambda \text{ gilt } DNV = NDV$$

Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Wegen $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ EW} \\ \text{von } A}} G_\lambda$

$$\text{gibt zu } \lambda \text{ EW von } A \text{ ein } v_\lambda \in G_\lambda \text{ mit } v = \sum_{\lambda = \text{EW v. } A} v_\lambda$$

$$\Rightarrow DNV = \sum DNV_\lambda = \sum NDv_\lambda = NDv$$

Aufgabe 4

$$\dot{x} = A(t)x, A : J \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{FS: } \phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, t \mapsto \phi(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$$

$$\phi(0) \text{ bijektiv } (\Leftrightarrow \det(\phi(0)) \neq 0)$$

Ist $\det(\phi(t_0)) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, dann ist $\det(\phi(t)) \neq 0 \forall t \in I$ (siehe Vorlesung)

Hat man ein FS ϕ , so ist die Lösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t), x(0) = x_0$

$$\text{gegeben durch } I \rightarrow \mathbb{R}^n, x(t) = \underbrace{\phi(t)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{\phi^{-1}(0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{x_0}_{\in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$$

Für A konstant (z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$) gibt es Lösungsverfahren zum Finden eines

FS

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, t \mapsto \exp(tA) \text{ ist ein FS mit } \exp(0 \cdot A) = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Lösungen von $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x(t) = \exp(tA)x_0$

Ist ϕ ein FS mit $\phi(0) = E_n$, dann ist $\phi(t) = \exp(tA) \forall t \in \mathbb{R}$

Ist ϕ ein FS, dann ist $\exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1} \forall t \in \mathbb{R}$

Lösungsverfahren zum Berechnen eines FS:

Das Lösungsverf. geht im Fall, dass A konstant.

Ist A(t) abh. dann ist das Lösungsverfahren nicht mehr angebracht.

(siehe Blatt 5, Aufgabe 4)

Erstmal sei $n = 2$: Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

bestimme Eigenwerte von A (In \mathbb{C} erhalten wir immer 2 EW)

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ EW, gibt es 2 linear unabh. EV v_1, v_2

Dann heißt $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1(t) := e^{\lambda_1 t} v_1$

Eigenfunktion zum EW λ_1 und $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2(t) := e^{\lambda_2 t} v_2$

EF zu EW λ_2 .

Es ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ein FS.

Bsp.: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen EW: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Bestimme EV:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_1 + v_2 \\ v_2 = 2v_2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu 1

$$\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu 2

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} \\ 0 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 v_2 \\ v_3 v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 v_3 + v_4 \\ v_2 v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0, v_1 = 1 \\ v_4 = 1, v_3 = -1 \end{cases}$$

$$\exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} \\ 0 e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} - e^t \\ 0 e^{2t} \end{pmatrix}$$

2) λ_1, λ_2 sind komplex. D.h. es gibt $\rho \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$\lambda_1 = \rho + i\omega, \lambda_2 = \rho - i\omega$. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ EV zu λ_1

Sei $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1 := \Re(e^{\lambda_1 t})$

Sei $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2 := \Im(e^{\lambda_1 t})$

Dann ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

$$\text{z.B. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2 - \lambda)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \text{EW} : 2 \pm i3$$

$$\begin{pmatrix} (2 + 3i)v_1 \\ (2 + 3i)v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - 3v_2 \\ 3v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 + 3iv_1 = 2v_1 - 3v_2 \Rightarrow v_2 = -iv_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ EV zu } 2 + 3i$$

$$\text{Für } t \in \mathbb{R} \text{ gilt: } e^{(2+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2t} e^{3it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2t} (\cos(3t) + i \sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ \sin(3t) & -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

3) Erhalten wir einen EW λ und nur einen EV zu λ , d.h. sind v_1, v_2 EV zu λ , dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $v_1 = cv_2$ (Es ist 1 geom. Vielfachheit von λ , 2 algebraische)

Sei v EV zu λ . Dann gibt es $u \in \mathbb{R}^2$ mit $Au = \lambda u + v$.

Sei $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v$

Sei $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(u + tv)$

Dann ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = e^{\lambda t}(v, (u - tv))$ ein FS

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (2 - \lambda)^2 + 0 = 0 \Rightarrow 2 \text{ EW}$$

$$\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 = 2v_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 0$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zu 2, gibt kein l.u. weiteren EV

$$\begin{pmatrix} 2u_1 + u_2 \\ 2u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 + 1 \\ 2u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2u_1 + u_2 = 2u_1 + 1 \Rightarrow u_2 = 1, u_1 \text{ egal.}$$

Wir wähl $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $u_1 = 0$

$$\Rightarrow \varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist FS}$$

Hinweise Blatt 6

Für $\dot{x} = Ax + h$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x(0) = x_0$ (konstant), $h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$

1) Finde ein FS ϕ

2) $\exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1}$

3) Berechne $x(t) = \exp(tA)x_0 + \underbrace{\int_0^t \underbrace{\exp((t-s)A)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{h(s)}_{\in \mathbb{R}^n} ds}_{\in \mathbb{R}^n}$ ist Lösung von $\dot{x}(t) = Ax(t) +$

$+h(t)$, $x(0) = x_0$ (siehe Vorl.)

Frage: gilt wie in Fall $n=1$... Antwort: Nein

Aufgabe 4: $I(t) = \int_0^t A(r) dr$, $\frac{d}{dt} \exp(I(t)) \neq \underbrace{\dot{I}(t)}_{A(t)} \exp(I(t))$