2 Besprechung zu Blatt2 zu Numerik 1

Aufgabe 1

a) 1) Sei A pos definit
Dann ist, wenn $f(x) = 0$
$\sqrt{x^t Ax} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, weil A pos. definit

2) Betrachte $f(\lambda x) = \sqrt{\lambda x^t A \lambda x} = |\lambda|\sqrt{x^t Ax} = |\lambda| f(x)$

3) Betrachte $f(x+y) = \sqrt{(x+y)^t A(x+y)} = \sqrt{x^t A(x+y) + y^t A(x+y)} = \sqrt{x^t Ax + x^t Ay + y^t Ax + y^t Ay} = \sqrt{x^t Ax + 2x^t Ay + y^t Ay}$
$\leq \sqrt{x^t Ax + y^t Ay + 2\sqrt{x^t Ax \cdot y^t Ay}} = \sqrt{(\sqrt{x^t Ax} + \sqrt{y^t Ay})^2} = f(x) + f(y)$

Sei f Norm, dann folgt mit $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underbrace{\sqrt{x^t Ax}}_{>0} \Rightarrow x = 0$, also ist A pos. def.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $||.||$ Norm,
Dann ist $||A \cdot B|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|| = 0$
Aber $\underbrace{||A||}_{\neq 0} \cdot \underbrace{||B||}_{\neq 0} \neq 0$

Aufgabe 2

$||A||_F = \sum_{ij} |a_{ij}|^{1/2}, \ \sum_{ij} |a_{ij}|^{1/2} = (Spurvon A^T A)^{1/2}$

$$A = \begin{pmatrix} ...a_1... \\ ... \\ ...a_n... \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_1 & ... & a_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & ... & a_n a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & ... & a_n a_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n a_1 & a_2 a_n & ... & a_n^2 \end{pmatrix}$$

$spur(A^T A) = \sum_{j=1}^n a_j, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = spur(A^T A)$

Weiter $||.||_F$ unitär invariant, also $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $U^T U = 1, \ V^T V = 1$
$\Rightarrow ||UAV||_F = (spur((UAV)^T (UAV)))^{1/2}$
$(UAV)^T (UAV) = V^T A^T \underbrace{U^T U}_{1} AV = V^T A^T AV$

Z.z. $spur(AB) \stackrel{!}{=} spur(BA)$:
Bew: $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$, $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$
$AB = (\sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk})_{j,k=1}^n$
Also $spur(AB) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lj}$
$BA = (\sum_{l=1}^n b_{jl} a_{lk})_{j,k=1}^n$
$\Rightarrow spur(BA) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{jl} a_{lj}$
$spur(V^T A^T AV) = spur(A \underbrace{VV^T}_{1} A^T) = spur(AA^T)$
$\Rightarrow ||UAV||_F = \sqrt{spur(V^T A^T AV)} = \sqrt{spur(AA^T)} = \sqrt{spur(A^T A)} = ||A||_F$

Aufgabe 3

z.Z.: $A \neq 0$ singulär $k(A) = \infty$
$A_n, n \in \mathbb{R}$ eine Folge invertierbarer Matrizen, für die gilt:
$\lim\limits_{n \to \infty} ||A - A_n|| = 0$
Dann $\lim\limits_{n \to \infty} \kappa(A) = \infty$
Beweis:
$|||1|| - ||A_n||| \leq ||A - A_n|| \to 0$
$||A_n|| \to ||A||$
Damit für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$
(*): $||A_n|| \geq \frac{1}{2}||A||$
Annahme: $\lim\limits_{n \to \infty} \kappa(A) = 0$
Also gilt für geeignetes M und eine Teilfolge $\{A_{n_k}\}$
$||A_{n_k}||||A_{n_k}^{-1}|| \leq M$
Mit (*) gilt $||A_{n_k}^{-1}|| \leq \frac{2M}{||A||}$
Da jede beschr. Folge eine konvergente Teilfolge enthält, gilt:
$\exists \{n_{k_l}\} : A_{n_{k_l}} \to \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$A_{n_{k_l}} A_{n_{k_l}}^{-1} = 1$
$A\tilde{A} = 1$
Widerspruch, da A nicht invertierbar, also $\lim\limits_{n \to \infty} \kappa(A_n) = \infty$

Aufgabe 4

Listing 1: Invertieren

```
function x=inverti(x)
  for i=1:length(x) %Zeile
    a=1/x(i,i); %Kehrwert Diag.el. zwischenspeichern
    x(i,:)*=a; %Zeile durch Diagonalelement teilen
    x(i,i)*=a; %Kehrw. urspr. Diagonalelement
    x(i,1:i-1)*=-x(1:i-1,1:i-1); %0- Elemente links Diag.el .* bereits invertierter Matrixteil
  end
end

%Verfahren basierend auf dem Gauß-Jordan-Algorithmus
%Die Matrix wird einer Einheitsmatrix gegenübergestellt und als Gleichungssystem aufgefasst
%Im Zuge der Umformung wird zunächst duch das Diagonalelement einer Zeile geteilt und dann zu
%den anderen Einträgen links davon die Zeile subtrahiert, in der dieses Element bereits aufgelöst
%wurde, also in einer unteren Dreiecksmatrix das Element j-j für einen Eintrag in der j- Spalte.
%Dies wird durchgeführt, bis an der entsprechenden Stelle eine 0 steht. Dadurch ergibt sich auf der linken
%Seite des Gleichungssystems erneut eine Einheitsmatrix, während auf der rechten Seite die Koeffizienten die
%erwünschte invertierte Matrix darstellen.

%Die Division kann man auch über die gesamte Zeile mittels Zeilenvektor *a=1/x(i,i) durchführen, wobei man das
%Diagonalelement erneut multiplizieren muss, da a ja dessen Kehrwert ist und 1/a *a *a=a=1/x(i,i)
```

```
%Da man für die Elemente links des Diagonalelementes jeweils mit dieser Zahl gewichtete Elemente der
%Zeile, in der man nach diesem Element bereits aufgelöst hat, abziehen muss, kann man auch diese Elemente als
%Vektor mit der Matrix der Einträge, die bereits invertiert sind, multiplizieren und entsprechend von der
%Einheitsmatrix an den Stellen (alle 0) abiehen, bzw. einfach negieren

%Die Elemente rechts der Diagonalelemente sind anfangs 0 und werden durch die Operatore nur multiplikativ
%verändert, also bleiben 0.

%Julian Bergmann
```