

Besprechung zu Blatt 5 zu Analysis 3

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \det(M(t)) = \det(m_1(t), \dots, m_n(t)) = \det(m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \sum_{J \in S_n} \text{sign}(J) \prod_{i=1}^n m_{i,J(i)}(t) \\ S_n &\text{ Menge der Permutationen von } \{1, \dots, n\} \\ \dot{\omega}(t) &= \sum_{J \in S_n} \text{sign}(J) \frac{d}{dt} \underbrace{\prod_{i=1}^n m_{i,J(i)}(t)}_{\sum_{j=1}^n \dot{m}_{j,J(j)}(t) \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,J(i)}(t)} \quad (\text{endliche Summen} \Rightarrow \text{vertauschbar}) \\ \Rightarrow \dot{\omega}(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{J \in S_n} \text{sign}(J) \dot{m}_{j,J(j)}(t) \prod_{i=1, i \neq j}^n m_{i,J(i)}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(m_1(t), \dots, \underbrace{\dot{m}_j(t)}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, m_n(t)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \text{spur}(A(t)\omega(t)), \quad \dot{M}(t) = A(t)M(t) \\ n = 2, \text{ bei } t \in \mathbb{R} \text{ ist } M(t) &= (m_1(t), m_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{wir betrachten } \omega(t+h) &\text{ f\u00fcr } |h| \text{ klein} \\ \omega(t+h) &= \det(M(t+h)) = \det(m_1(t+h), m_2(t+h)) \\ &= Fl(m_1(t+h), m_2(t+h)) \\ &= Fl(m_1(t+h), P_{r_2}(m_2(t+h))) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} \omega, \nu \in \mathbb{R} \ddot{x} &= -\omega^2 x + \sin(\nu t), \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0 \\ y &:= \dot{x} \\ \text{(P)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{(Q)} \\ \text{Bestimmen zuerst ein FS von (Q)} &\text{ (von (P))} \\ \text{Sei } A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{EW: } 0 &= (-\lambda)^2 + \omega^2 = \lambda^2 + \omega^2 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm i\omega\} \\ \text{EV: Da } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} &\text{ brauchen wir nur die EV z.B. zu } \lambda = i\omega \\ \begin{pmatrix} i\omega v_1 \\ i\omega v_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -\omega^2 v_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i\omega v_1 = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \text{ m\u00f6glich!} \\ e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \phi(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ \phi(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \exp(tA) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \phi(t)\phi(0)^{-1} \\ \text{Jetzt suchen wir die L\u00f6sung von } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x + \sin(\nu t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu t) \end{pmatrix} \\
\text{Satz 5.4: } &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \exp(tA) \underbrace{\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}} + \int_0^t \exp((t-s)A) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds \\
&\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s)) \\ -\omega \sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds \\
\Rightarrow x(t) &= \int_0^t (\cos(\omega(t-s)), \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s))) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds \\
&= \int_0^t (0 \cdot \cos(\omega(t-s)) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-s)) \sin(\nu s)) ds = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \sin(\nu s) ds \\
&= -\frac{1}{2\omega} \int_0^t (\underbrace{\cos(\omega(t-s) + \nu s)}_{\omega t + s(\nu - \omega)} - \underbrace{\cos(\omega(t-s) - \nu s)}_{\omega t - s(\omega + \nu)}) ds \\
\nu = \omega &\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2\omega} \int_0^t (\cos(\omega t) - \cos(\omega t - 2\omega s)) ds \\
&= -\frac{1}{2\omega} \left[\cos(\omega t) s - \frac{1}{2\omega} \sin(\omega t - 2\omega s) \right]_0^t \\
&= -\frac{1}{2\omega} (\cos(\omega t) t + \underbrace{\frac{1}{2\omega} \sin(-\omega t) - \frac{1}{2\omega} \sin(\omega t)}_{-\sin(\omega t)}) \\
&= \frac{1}{2\omega^2} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) \\
\nu \neq \omega &\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{\nu - \omega} \sin(\omega t + s(\nu - \omega)) - \frac{1}{-(\nu + \omega)} \sin(\omega t - s(\nu + \omega)) \right]_0^t \\
&= -\frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{\nu - \omega} \sin(\nu t) - \frac{1}{\nu - \omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\nu + \omega} \sin(-\nu t) - \frac{1}{\nu + \omega} \sin(\omega t) \right) \\
&= -\frac{1}{2\omega} \frac{1}{\nu - \omega} (\sin(\nu t) - \sin(\omega t)) + \underbrace{\frac{1}{2\omega} \frac{1}{\nu + \omega} (\sin(\omega t) + \sin(\nu t))}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \omega} \frac{1}{2\omega} \frac{1}{2\omega} 2 \sin(\omega t) = \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t)} \\
\frac{\sin(\nu t) - \sin(\omega t)}{\nu - \omega} &= t \frac{\sin(\nu t) - \sin(\omega t)}{t\nu - t\omega} \xrightarrow{\nu \rightarrow \omega} t \sin'(\omega t) = t \cos(\omega t) \\
x(t) &\xrightarrow{\nu \rightarrow \omega} -\frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{2\omega^2} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad I(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t A(s) ds = \begin{pmatrix} 0 & [s]_0^t \\ 0 & [s^2]_0^t \end{pmatrix}$$

$$I(t)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n	1	2	3
$I(t)^n$	$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & t^5 \\ 0 & t^6 \end{pmatrix}$

$$\text{Vermutung: } I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix}$$

n=1 OK \Rightarrow Die Vermutung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow I(t)^{n+1} = I(t)I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n+1} \\ 0 & t^{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2(n+1)-1} \\ 0 & t^{2(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\exp(I(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I(t)^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{n!} \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \end{pmatrix}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = e^{t^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} - \frac{1}{t} = \frac{e^{t^2}}{t} - \frac{1}{t} = \frac{e^{t^2}-1}{t}$$

$$\Rightarrow \exp(I(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{t^2}-1}{t} \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$$\exp(I(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\frac{e^{t^2}-1}{t} = \frac{e^{t^2}-e^{0^2}}{t-0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt}(e^{t^2})|_{t=0} = 2te^{t^2}|_{t=0} = 0$
 $\Rightarrow t \mapsto \exp(I(t))$ ist stetig ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$)