Besprechung zu Blatt 5 zu Analysis 3

Aufgabe 1

$\omega(t) = det(M(t)) = det(m_1(t), ..., m_n(t)) = det(m_{ij})_{i,j=1,...,n} = \sum_{J \in S_n} sign(J) \prod_{i=1}^{n} m_{i,J(i)}(t)$

S_n Menge der Permutationen von $\{1, ..., n\}$

$\dot{\omega}(t) = \sum_{J \in S_n} sign(J) \frac{d}{dt} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} m_{i,J(i)}(t)}_{\sum_{j=1}^{n} \dot{m}_{j,J(j)}(t) \prod_{i=1}^{n} m_{i,J(i)}(t)}$ (endliche Summen $\Rightarrow$ vertauschbar

$\Rightarrow \dot{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{J \in S_n} sign(J) \dot{m}_{j,J(j)}(t) \prod_{i=1, i \neq j}^{n} m_{i,J(i)}(t)$

$= \sum_{j=1}^{n} det(m_1(t), ..., \underbrace{\dot{m}_j(t)}_{j-teStelle}, ..., m_n(t))$

Aufgabe 2

$\dot{\omega}(t) = spur(A(t)\omega(t)), \quad \dot{M}(t) = A(t)M(t)$

$n = 2$, bei $t \in \mathbb{R}$ ist $M(t) = (m_1(t), m_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

wir betrachten $\omega(t + h)$ für $|h|$ klein

$\omega(t + h) = det(M(t + h)) = det(m_1(t + h), m_2(t + h))$

$= Fl(m_1(t + h), m_2(t + h))$

$= Fl(m_1(t + h), P_{r_2}(m_2(t + h)))$

Aufgabe 3

$\omega, \nu \in \mathbb{R} \ddot{x} = -\omega^2 x + \sin(\nu t), \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0$

$y := \dot{x}$

(P) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Q)

Bestimmen zuerst ein FS von (Q) (von (P))

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$

EW: $0 = (-\lambda)^2 + \omega^2 = \lambda^2 + \omega^2 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm \omega\}$

EV: Da $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} brauchenwirnurdenEV z.B.zu \lambda = i\omega$

$\begin{pmatrix} i\omega v_1 \\ i\omega v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -\omega^2 v_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i\omega v_1 = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$ möglich!

$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$

$= (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \phi(t)\phi(0) - 1$

Jetzt suchen wir die Lösung von $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x + \sin(\nu t) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu t) \end{pmatrix}$$

$$Satz 5.4: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = exp(tA) \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}}}_{=0} + \int_0^t exp((t-s)A) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-s)) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-s)) \\ -\omega\sin(\omega(t-s)) & \cos(\omega(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t (\cos(\omega(t-s)), \tfrac{1}{\omega}\sin(\omega(t-ss))) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t (0 \cdot \cos(\omega(t-s)) + \tfrac{1}{\omega}\sin(\omega(t-s))\sin(\nu s))ds = \tfrac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega(t-s))\sin(\nu s)ds$$

$$= -\tfrac{1}{2\omega}\int_0^t (\cos(\underbrace{\omega(t-s)+\nu s}_{\omega t + s(\nu-\omega)}) - \cos(\underbrace{\omega(t-s)-\nu s}_{\omega t - s(\omega+\nu)}))ds$$

$$\nu = \omega \Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{2\omega}\int_0^t (\cos(\omega t) - \cos(\omega t - 2\omega s))ds$$

$$= -\tfrac{1}{2\omega}\left[\cos(\omega t)s - \tfrac{1}{-2\omega}\sin(\omega t - 2\omega s)\right]_0^t$$

$$= -\tfrac{1}{2\omega}(\cos(\omega t)t + \underbrace{\frac{1}{2\omega}\underbrace{\sin(-\omega t)}_{-\sin(\omega t)} - \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t))}_{-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$= \tfrac{1}{2\omega^2}(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t))$$

$$\nu \neq \omega \Rightarrow x(t) = -\tfrac{1}{2\omega}\left[\tfrac{1}{\nu-\omega}\sin(\omega t + s(\nu-\omega)) - \tfrac{1}{-(\nu+\omega)}\sin(\omega t - s(\nu+\omega))\right]_0^t$$

$$= -\tfrac{1}{2\omega}\left(\tfrac{1}{\nu-\omega}\sin(\nu t) - \tfrac{1}{\nu-\omega}\sin(\omega t) + \tfrac{1}{\nu+\omega}\sin(-\nu t) - \tfrac{1}{\nu+\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2\omega}\tfrac{1}{\nu-\omega}(\sin(\nu t) - \sin(\omega t)) + \underbrace{\frac{1}{2\omega}\frac{1}{\nu+\omega}(\sin(\omega t) + \sin(\nu t))}_{\xrightarrow{\nu\to\omega} \frac{1}{2\omega}\frac{1}{2\omega}2\sin(\omega t) = \frac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)}$$

$$\tfrac{\sin(\nu t) - \sin(\omega t)}{\nu-\omega} = t\tfrac{\sin(\nu t) - \sin(\omega t}{t\nu - t\omega} \xrightarrow{\nu\to\omega} t\sin'(\omega t) = t\cos(\omega t)$$

$$x(t) \xrightarrow{\nu\to\omega} -\tfrac{1}{2\omega}t\cos(\omega t) + \tfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

$$= \tfrac{1}{2\omega^2}(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t))$$

Aufgabe 4

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad I(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t A(s)ds = \begin{pmatrix} 0 & [s]_0^t \\ 0 & [s^2]_0^t \end{pmatrix}$$

$$I(t)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n	1	2	3
$I(t)^n$	$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & t^5 \\ 0 & t^6 \end{pmatrix}$

Vermutung: $I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix}$

n=1 OK $\Rightarrow$ Die Vermutung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow I(t)^{n+1} = I(t)I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t2n+1 \\ 0 & 2^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2(n+1)-1} \\ 0 & t^{2(n+1)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow I(t)^n = \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

$exp(I(t)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I(t)^n$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & t^{2n-1} \\ 0 & t^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{n!} \\ 0 & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \end{pmatrix}$

$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = e^{t^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} - \frac{1}{t} = \frac{e^{t^2}}{t} - \frac{1}{t} = \frac{e^{t^2}-1}{t}$

$\Rightarrow exp(I(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^{t^2}-1}{t} \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$

$exp(I(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: $\frac{e^{t^2}-1}{t} = \frac{e^{t^2}-e^{0^2}}{t-0} \xrightarrow{t \to 0} \frac{d}{dt}(e^{t^2})|_{t=0} = 2te^{t^2}|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow t \mapsto exp(I(t))$ ist stetig $(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2})$