Besprechung zu Blatt3 zu Numerik 1

Aufgabe 1

1. Hilfsätze:

1) Sind L_1, L_2 untere (obere) Dr. Matr., dann ist das Produkt L_1L_2 ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix
2) Ist L eine untere (obere) Dreiecksmatrix, dann ist auch L^{-1} eine untere (obere) Dr.Matr., falls L invert. ist

Beweis (für untere Dr.Matr.):

1) Ist $i < j$, dann ist $\underbrace{[l_{i1}^{(1)}, ..., l_{in}^{(1)}]}_{eine\ Zeile\ von\ L_1} = [l_{i1}^{(1)}, ..., l_{ii}^{(1)} 0, ..., 0]$

und $\begin{pmatrix} l_{1j}^{(1)} \\ \vdots \\ l_{nj}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{jj}^{(2)} \\ \vdots \\ l_{nj}^{(2)} \end{pmatrix}$ (Spalte von L_2)

Das Sk.prod. der beiden Vektoren ist offensichtlich 0, da $i < j$

2) Da L invertierbar ist, sind alle Diag.el. l_{ii} von L nicht 0 (sonst $det(L) = 0$)
Wenn L^{-1} keine untere Dreiecksmatr. wäre, dann gäbe es eine Spalte von L^{-1} mit folg. Gestalt:

Spalte von L^{-1} $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{l}_{ij} \\ \vdots \\ \tilde{l}_{jj} \\ \vdots \\ \tilde{l}_{nj} \end{pmatrix}$, mit $i < j \tilde{l}_{ij} \neq 0$

Das Skalarprodukt von $[l_{i1}, ..., l_{ii}, 0, ..., 0]$ mit der Spalte aus ist $L^{-1} l_{ii}\tilde{l}_{ii} \neq 0$
Das bedeutet, dass $LL^{-1} \neq 1$, Wid!

Hilfssatz Eind. der LU-Zerlegung zeigen: Falls $A = L_1U_1 = L_2U_2$ gilt, dann kann man folg. umformen:
$L_2^{-1}L_1U_1 = U_2 \Leftrightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} wobei L_2^{-1}L_1 = I = D \Rightarrow L_2 = L_1,\ U_2 = U_1$

Aufgabe 2

Z.z. Die Zeilennorm von $||U||_\infty = 2^{n-1}||A||_\infty$, wobei $|l_{jk}| \leq 1$

a) Nach Lemma 4.13 (Skript) ist $L = M_1^{-1} \cdot ... \cdot M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ y_2^{(1)} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n^{(1)} & \cdots & y_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$

Die Bed. $|l_{jk}| \leq 1$, s.h. $|y_l^{(k)}| \leq 1$. Deshalb $||M_k||_\infty \leq 1,\ k = 1, ..., n-1$
Da $||...||_\infty$ eine konsistente Matrixnorm ist, gilt: $||U||_\infty = ||L^{-1}A||_\infty = ||M_{n-1}M_{n-2} \cdot ... \cdot M_1A||_\infty \leq \underbrace{||M_{n-1}||_\infty}_{\leq 2} \cdot ||M_{n-2}||_\infty \cdot ... \cdot ||M_1||_\infty ||A||_\infty \leq 2^{n-1}||A||_\infty$

b) z.Z. A besitzt eine LU-Zerl mit $|l_{ik}| \leq 1$ und $u_{nn} = 2^{n-1}$ Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

folgt mit Gauß-Zerl, dass $y_l^{(k)} = -1$ und damit ergibt sich $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $U =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & 2 \\ & & \vdots \\ & & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

1. Teil A ist zeilenw. Strikt diag.dominant, falls $|a_{ij}| > \sum\limits_{k=1,k\neq j} |a_{jk}|,\ j = 1, ..., n$

Ist A diag.dom. $\Rightarrow$ alle m-ten Hauptuntermatrizen von A sind offensichtlich auch diag. dom.
Es reicht z.Z. dass A invertb.

Es gilt: $A = D(I + B)$ mit $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$B = (b_{jk})_{j,k=1}^n,\ b_{jj} = 0,\ j = 1, ..., n,\ b_{jk} = a_{jk}/a_{jj},\ j \neq k$ und I als Einh. matr. im $\mathbb{R}^{n\times n}$

Wegen A strikt diag.dom. ist $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{jk}| = |a_{jj}|^{-1} \sum\limits_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| < 1, j = 1, ..., n$

Daraus folgt $||B||_\infty < 1$. Nach Lemma 3.11(S33) und Satz 3.9 ist dann $I + B$ eine invert. Matrix. Da D auch invert. ist, folgt A invert.

2.Teil
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a+5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 3a+11 \\ 0 & 2 & 8 & 14 & 6a+20 \\ 0 & 4 & 11 & 20 & 9a+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a+5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a+3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3a+8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 5a+14 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a+5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2a+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a+5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a+4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Siehe U03.zip