

Analysis-3-Tutorium

Mitgeschrieben und geL^AT_EXt von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1	2.12.10	1
1.1	Lösung bestimmen: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t)$	1
1.2	Existenzintervall über Trennung d. Variablen	1
1.3	Phasenportrait	2
2	9.12.10	2
2.1	Übungsblatt	2
	2.1.1 Aufgabe 1	2
	2.1.2 Aufgabe 2	4
2.2	Aufgabe 3	4
2.3	Aufgabe 4	6
3	13.1.11	6
3.1	Holomorphe Funktionen	6
4	13.1.11	8
4.1	Integrale, Homotopie	8
4.2	Beispiel zu Homotopiesatz	10
5	27.1.11	10
5.1	Singularitäten	10
5.2	Laurententwicklung	11
5.3	Trick: Cauchy-Integral-Formel	12
6	3.2.11	14
6.1	Aufgabe 2	14
6.2	Beispiel 1	15
6.3	Aufgabe 4	15
7	7.2.11	16
7.1	Formeln	16
7.2	Aufgabe 2	16
7.3	Aufgabe 3	17
7.4	Aufgabe 4	18
7.5	Aufgabe 5	18
8	10.2.11	20
8.1	Aufgabe 1	20
8.2	Aufgabe 3	21
8.3	Beispiel aus Blatt 14	22

1 Tutorium vom 2.12.2010

1.1 Lösung bestimmen: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t)$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \exp((t - t_0)A) \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu s) \end{pmatrix} ds$$

Reicht $x(t)$ zu bestimmen

1.2 Existenzintervall über Trennung d. Variablen

$$\text{AWP} \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{3}t^2(x^2(t) - 1) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}t^2(x^2(t) - 1) \quad | : (x^2(t) - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)-1} = \frac{1}{3}t^2 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)-1} ds = \int_0^t \frac{1}{3}s^2 ds = t^3$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln(x(s) - 1)\right)' = \frac{0.5\dot{x}(s)}{x(s)-1}$$

$$(\ln(x^2(t) - 1))' = \frac{1}{x^2(t)-1} \cdot 2x(t) \cdot \dot{x}(t)$$

$$(\ln(f(t)))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 1 = \underbrace{(A+B)}_{=0}x + \underbrace{(A-B)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A+B & = 0 \\ A-B & = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)-1} ds = \int_0^t \frac{0.5\dot{x}(s)}{x(s)-1} + \frac{-0.5\dot{x}(s)}{x(s)+1} ds = \left[\frac{1}{2} \ln(x(s) - 1) - \frac{1}{2} \ln(x(s) + 1)\right]_0^t = \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x(s)-1}{x(s)+1}\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) - \ln\left(\frac{x(0)-1}{x(0)+1}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right) = t^3 \quad | + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) = t^3 + \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)-1}{x(t)+1} = e^{2t^3 + \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)} = e^{2t^3} \cdot \frac{x_0-1}{x_0+1} \quad | \cdot (x(t) + 1)$$

$$\Rightarrow x(t) - 1 = (x(t) + 1) ce^{2t^3} = x(t) ce^{2t^3} + ce^{2t^3} \quad | - x(t) ce^{2t^3} + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{x(t) - x(t)ce^{2t^3}}_{x(t)(1-ce^{2t^3})} = ce^{2t^3} + 1$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1+ce^{2t^3}}{1-ce^{2t^3}}$$

Betrachten: $\langle \rangle > 0, \frac{x_0-1}{x_0+1} > 0 \quad | \cdot (x_0 + 1)$

Falls $x_0 + 1 > 0, x_0 > 1$ folgt $x_0 - 1 > 0, x_0 > 1$

Falls $x_0 + 1 < 0, x_0 < -1$ folgt $x_0 - 1 < 0, x_0 < 1$

$\Rightarrow \langle \rangle > 0 \Leftrightarrow x_0 > 1$ oder $x_0 < -1$

$x_0 \in (-1, 1)$ ist Ex. int. $J_{x_0} = \mathbb{R}$

Vermutung: Für $x_0 = 1$ ist $x(t) = 1$ Lsg. des AWP.

Beweis: $\dot{x}(t) = 0, \dot{x}(t) = 3t^2(x^2(t) - 1) = 3t^2(1^2 - 1) = 0$

$x_0 = 1$ analog $x(t) = -1 \Rightarrow x_0 \in [-1, 1]$ ist $J_{x_0} = \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$:

$$1 - ce^{2\tilde{t}^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} = e^{2\tilde{t}^3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{c}\right) = 2\tilde{t}^3 \Leftrightarrow -\ln(c) = 2\tilde{t}^3 \Leftrightarrow \tilde{t} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\ln(c)}$$

$\tilde{J}_{x_0} = (-\infty, \tilde{t})$ oder $\hat{J}_{x_0} = (\tilde{t}, \infty)$

Richtiges Ex.int. ist wo $t_0 = 0 \in \tilde{J}_{x_0}$ oder $t_0 \in \hat{J}_{x_0}$

Betrachte ab $\langle \rangle > 1$ oder $c < 1$

$c = \frac{x_0-1}{x_0+1}$, falls $x_0 > 1$, dann $c < 1$, also $\tilde{t} > 0$, damit ist $J_{x_0} = (-\infty, \tilde{t})$,

falls $x_0 < -1$, dann $\langle \rangle > 1$, also $\tilde{t} < 0$, damit ist $J_{x_0} = (\tilde{t}, \infty)$

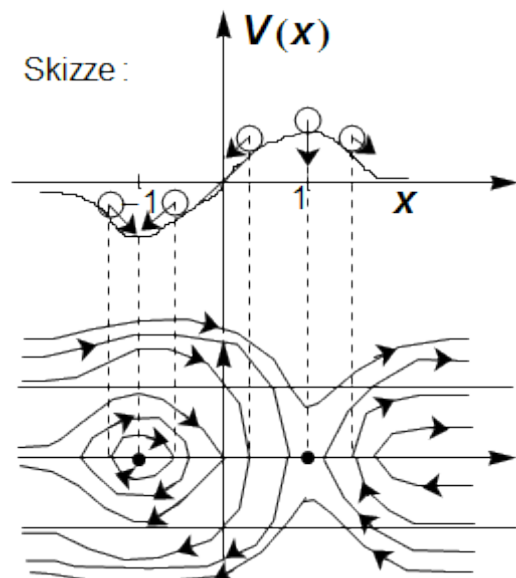
$$c = \frac{-|x_0|-1}{-|x_0|+1} = \frac{1+|x_0|}{1-|x_0|}$$

1.3 Phasenportrait

$$\ddot{x} = -V'(x), V(x) = \frac{x}{x^2+1} = x \frac{1}{x^2+1}$$

$$V'(x) = \frac{x+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \frac{1}{x}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0$$



2 Tutorium vom 9.12.2010

2.1 Übungsblatt

2.1.1 Aufgabe 1

c) $\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) + \frac{1}{t^2}, x(1) = 3$

$$(\dot{x}(t) = a(t)x(t) + h(t))$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\exp\left(\int_{t_0}^t a(r) dr\right)}_{U(t,t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t \underbrace{\exp\left(\int_s^t a(s) ds\right)}_{U(t,s)} h(r) dr = \exp\left(\int_1^t \frac{1}{r} dr\right) \cdot$$

$$3 + \int_1^t \exp\left(\int_s^t \frac{1}{r} dr\right) \frac{1}{s^2} ds$$

$$U(t,s) = \exp\left(\int_s^t \frac{1}{r} dr\right) = \exp([\ln(r)]_s^t) = \exp(\ln(t) - \ln(s)) = \frac{t}{s}$$

$$U(t,1) = t$$

$$\int_1^t U(t,s) \frac{1}{s^2} ds = \int_1^t \frac{t}{s^3} ds = \left[-\frac{t}{2s^2}\right]_1^t = -\frac{t}{2t^2} - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$$

$$x(t) = 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$$

kritisch bei 0, da dort nicht def.

$$\Rightarrow (-\infty, 0), (0, \infty)$$

$(0, \infty)$ ist Ex. int, da $t_0 = 1 \in (0, \infty)$

d) $\dot{x}(t) = x^2(t) + 3x(t) + 2, x(0) = 1$

$$x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{(x(t)+2)(x(t)+1)} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(x(s)+2)(x(s)+1)} ds = \int_0^t 1 ds = t$$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow A+B=0, A+2B=1 \Rightarrow$$

$$B=1, A=-1$$

$$\Rightarrow \dots = \int_0^t \frac{-\dot{x}(s)}{x(s)+2} + \frac{\dot{x}(s)}{x(s)+1} ds$$

$$= -[\ln(x(s)+2) + \ln(x(s)+1)]_0^t = [\ln\left(\frac{x(s)+1}{x(s)+2}\right)]_0^t = \ln\left(\frac{x(t)+1}{x(t)+2}\right) - \ln\left(\frac{x(0)+1}{x(0)+2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{3}{2}x(t)+1}{\frac{2}{2}x(t)+2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2}x(t)+1}{\frac{2}{2}x(t)+2} = e^t \Rightarrow \frac{x(t)+1}{x(t)+2} = \frac{2}{3}e^t =: c$$

$$\Rightarrow x(t) + 1 = c(x(t) + 2) = cx(t) + 2c$$

$$\Rightarrow x(t) - cx(t) = 2c - 1$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2c-1}{1-c} = \frac{2\frac{2}{3}e^t-1}{1-\frac{2}{3}e^t} = \frac{4e^t-3}{3-2e^t}$$

nicht def. falls $3 - e^t = 0$

$$\Leftrightarrow e^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

$$(-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right)), (\ln\left(\frac{3}{2}\right), \infty)$$

$(-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right))$ ist Ex. int, da $t_0 = 0 \in (-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right))$

2.1.2 Aufgabe 2

a) Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

$$\text{Zeigen Sie für } c \in \mathbb{R}^n \text{ und dem AWP } (*) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = c \end{cases}$$

die Beh. $\xi(t) = c$ ist Lsg. von $(*) \Leftrightarrow f(t, c) = 0 \forall t \in I$

„ \Rightarrow “: Sei $\xi(t)$ Lsg von $(*)$

z.Z. $f(t, c) = 0 \forall t \in I$

Da ξ das AWP $(*)$ erfüllt, gilt $0 = \dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t)) = f(t, c) \forall t \in I$

„ \Leftarrow “: Es gilt: $f(t, c) = 0 \forall t \in I$

z.Z. $\xi(t) = c$ ist Lsg von $(*)$

Sei $\xi(t) = c$, dann $\xi(0) = c$

und $\dot{\xi}(t) = 0 = f(t, c) = f(t, \xi(t))$, also ist $\xi(t) = c$ Lsg. von $(*)$

b) Wenn lipschitzstetig dann eindeutig/existent, sonst nicht unbeding

c) autonome DGL sind auch nicht-autonome DGL \Rightarrow JA

2.2 Aufgabe 3

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x}(t) = A_1 x(t)$$

$$\exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1} :$$

EW: $\lambda_3 = -1$, $v_3 = (0, 0, 1)$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

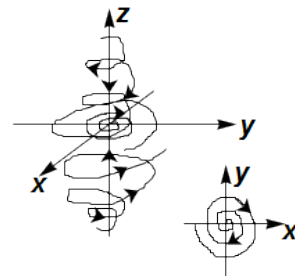
EW v. \tilde{A} : $0 = (1 - \lambda)^2 + 4 \Rightarrow (1 - \lambda) = \pm 2i \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

EV: $\underbrace{(\tilde{A} + (1 + 2i)I_2)}_{\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}} v_{1,2} = 0 \Leftrightarrow -2iv_{1,2}^{(1)} - 2v_{1,2}^{(2)} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$\chi(t)e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix} = e^t e^{2it} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix} = e^t (\cos(2t) + i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix}$$



$$= e^t \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) + 2i \sin(2t) \\ -2i \cos(2t) + 2 \sin(2t) \end{pmatrix} = e^t \left(\begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) \\ -2 \cos(2t) \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \Re(\chi(t)) = e^t \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \Im(\chi(t)) = e^t \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) \\ -2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) & 2e^t \sin(2t) & 0 \\ 2e^t \sin(2t) & -2e^t \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t)\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) & -e^t \sin(2t) & 0 \\ e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \exp(tA_1)x_0$$

$$\text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EW: 2, -2, -1

$$\text{EV: } \tilde{A} - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2: v = (1, 2, 0)$$

$$\tilde{A} + 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

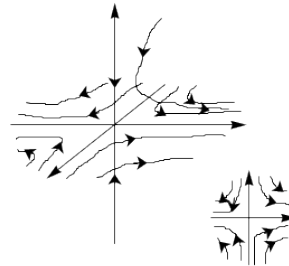
$$\Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2: v = (1, -2, 0)$$

$$\phi_1 = e^{2t}(1, 2, 0), \quad \phi_2(t) = e^{-2t} = e^{-2t}(1, -2, 0), \quad \phi_3 = e^{-t}(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} & 0 \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.3 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \underbrace{tx(t)^2 + 1}_{f(t,x(t))}, & x(0) &= 0 \\ \eta_0 &= x_0 = 0 \\ \eta_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \eta_n(s)) ds = 0 + \int_0^t s\eta(s)^2 + 2ds \\ \eta_1(t) &= \int_0^t s \cdot 0 + 1 ds = \int_0^t 1 ds = t \\ \eta_2(t) &= \int_0^t s \cdot s^2 + 1 ds = \int_0^t s^3 + 1 ds = \frac{1}{4}t^4 + t\end{aligned}$$

3 Tutorium vom 13.1.2011

3.1 Holomorphe Funktionen

Holomorph (komplex differenzierbar)?

1. Möglichkeit: $\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(w)}{z_0 - w}$ ex.
2. Möglichkeit: $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\Re(x + iy), \Im(x + iy))$
 f holomorph $\Leftrightarrow \tilde{f}$ reell dbar. und $J_{\tilde{f}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Beispiel 1: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3$

$$f(x + iy) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{\Re(f(x+iy))} + \underbrace{(3x^2y - y^3)}_{\Im(f(x+iy))}i$$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ ist reell dbar.

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = 3x^2 - 3y^2, \beta = 6xy$

Also f holomorph

Ergänzung: $f''(z) = 3z^2$

$$f'(x + iy) = 2(x + iy)^2 = 3(x^2 + 2xyi - y^2) = 3x^2 + 6xyi - y^2$$

$$f'(x + iy) = \alpha + i\beta = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$$

Beispiel 2: $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z$

$$\text{Betrachte: } f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x - e^i y = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = \underbrace{e^x \cos(y)}_{\Re(f)} + i \underbrace{e^x \sin(y)}_{\Im(f)}$$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_2$ ist holomorph mit $f'(x + iy) = \alpha + i\beta = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^{x+iy}$

Beispiel 3: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \underbrace{\Re(z) + \Im(z)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}(f)$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (\Re(x + iy) + \Im(x + iy), 0) = (x + y, 0)$ ist reell diffbar., aber:

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ nicht holomorph

Beispiel 4: $f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \Re(z)$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (x, 0)$

$$\Rightarrow J_{\tilde{f}_5}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_5$ nicht holomorph

Beispiel 5: $f_6 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f_6(z_0) - f_6(w)}{z_0 - w} = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{z_0 - w}{z_0 - w} = 1$$

$\Rightarrow f_6$ holomorph!

$$f_5|_{\mathbb{R}}(x + i0) = \Re(x + i0) = x$$

$$f_5|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}} = f_6|_{\mathbb{R}}$$

Beispiel 6: $f_7 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{z_0} - \frac{1}{w}}{z_0 - w} = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{\frac{w - z_0}{z_0 w}}{z_0 - w} = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{-1}{z_0 w} = \frac{-1}{z_0^2}$$

$\Rightarrow f_7$ holomorph

$$\{x + iy | x \in \mathbb{R}, y = c\}$$

$$\{x + iy | x = c, y \in \mathbb{R}\}$$

$$z \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|}$$

Betrachte „Verhalten er Fkt.“

$\bar{z} \sim$ Spiegelung an der „Realteil-Achse“

$\frac{1}{|z|} \sim$ Projektion auf den Einheitskreis

$$\{re^{i\varphi} | r = c, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

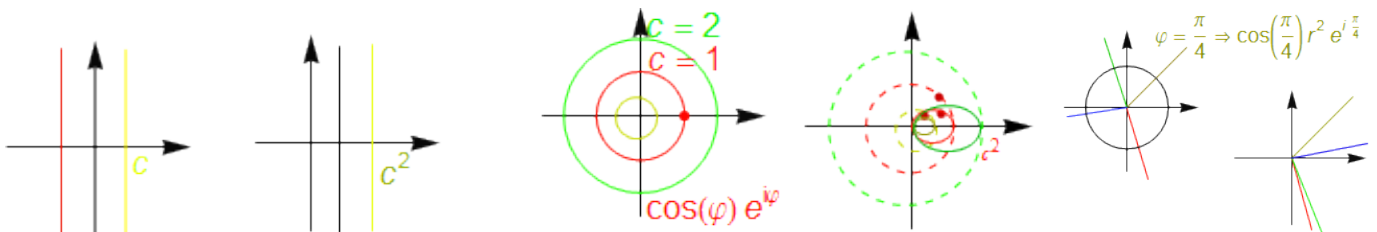
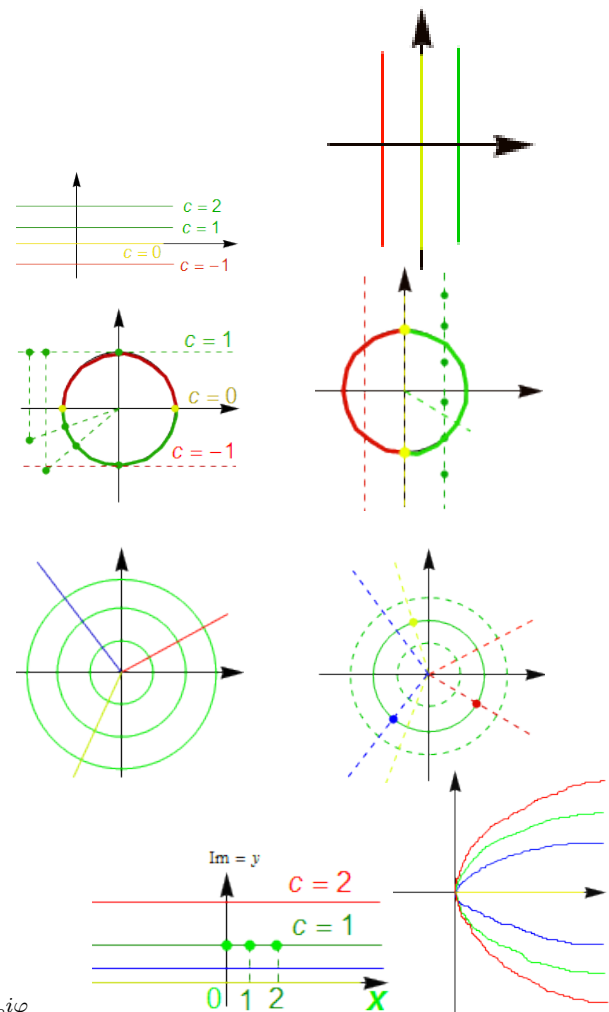
$$\{re^{i\varphi} | r \in \mathbb{R}, \varphi = c\}$$

$$z \mapsto \Re(z)z$$

$$x + iy \mapsto \Re(x + iy)(x + iy) = x(x + iy) = x^2 + ixy$$

$$\{x + iy | x \in \mathbb{R}, y = c = 1\}$$

$$re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \mapsto x \cos(\varphi) r e^{i\varphi} = \cos(\varphi) r^2 e^{i\varphi}$$

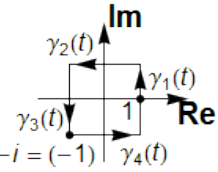


4 Tutorium vom 13.1.2011

4.1 Integrale, Homotopie

Berechne $\int_{\gamma} \bar{z} dz$:

γ_1 Kurve umläuft das Rechteck $[-1, 1] \times [-1, 1]$ im Gegenuhrzeigersinn $-i = (-1)$



$$\gamma_1(t) = 1 - i + 2it = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$\gamma_2(t) = i\gamma_1(t) = i - i^2 + 2i^2t = 1 + i - 2t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} t$$

$$\gamma_3(t) = i^2\gamma_1(t) = -\gamma_1(t) = -1 + i - 2it$$

$$\gamma_4(t) = i^3\gamma_1(t) = -i\gamma_1(t) = -1 - i + 2t$$

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) & , t \in [1, 2] \\ \gamma_3(t) & , t \in [2, 3] \\ \gamma_4(t) & , t \in [3, 4] \end{cases}, \quad \gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz + \int_{\gamma_3} \bar{z} dz + \int_{\gamma_4} \bar{z} dz$$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_{\gamma} \overline{\gamma_1(t)} \dot{\gamma}_1(t) dt$$

$$= \int_0^1 \overline{(1 - i + 2it)} (2i) dt = \int_0^1 \underbrace{(1 - i + 2it)}_{1+i(2t-1)} dt = \int_0^1 1 - i(2t - 1) \cdot 2i dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{2}_{\Im} i + \underbrace{2(2t - 1)}_{\Re} dt = \int_0^1 4t - 2 dt + i \int_0^1 2 dt$$

$$= [2t^2 - 2t]_0^1 + i[2t]_0^1 = 0 + 2i = 2i$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{\gamma_2(t)} \dot{\gamma}_2(t) dt$$

$$\text{Wissen: } \gamma_2(t) = i\gamma_1(t) \Rightarrow \dot{\gamma}_2(t) = i\dot{\gamma}_1(t)$$

$$\Rightarrow \dots = \int_0^1 \overline{i\gamma_1(t)} i\dot{\gamma}_1(t) dt$$

$$= \int_0^1 \overline{i\gamma_1(t)} i\dot{\gamma}_1(t) dt = \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)} \dot{\gamma}_1(t) dt = 2i \int_{\gamma_3} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{\gamma_3(t)} \dot{\gamma}_3(t) dt$$

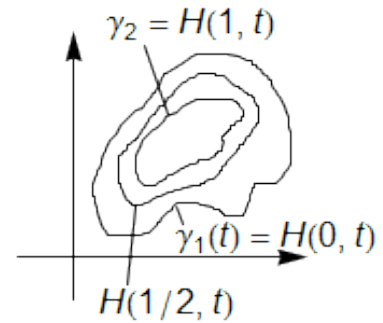
$$= \int_0^1 \overline{(-1)\gamma_1(t)} (-1)\dot{\gamma}_1(t) dt = \int_0^1 \overline{(-1)\gamma_1(t)} (-1)\dot{\gamma}_1(t) dt$$

$$= \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)} \dot{\gamma}_1(t) dt = 2i$$

$$\int_{\gamma_4} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{-i\gamma_1(t)} (-i)\dot{\gamma}_1(t) dt = 2i$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \bar{z} dz = 2i + 2i + 2i + 2i = 8i$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}, \quad \text{Berechne } \int_{\tilde{\gamma}} \bar{z} dz \\ \Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} \overline{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i \end{aligned}$$



Falls $f \in O(U)$ und γ_1, γ_2 homotop

$$\text{Dann gilt: } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

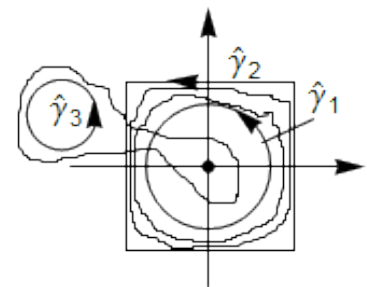
$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

gibt es $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$H(0, t) = \gamma_1(t)$$

$$H(1, t) = \gamma_2(t)$$

$$H(s, 0) = H(s, 1) \text{ falls } \gamma_1, \gamma_2 \text{ geschlossene Kurve}$$



Beispiel: $f : U \rightarrow \mathbb{C} (z \mapsto \frac{1}{z}, U = \mathbb{C} \setminus \{0\})$

$$\hat{\gamma}_1 \approx \hat{\gamma}_2$$

$\hat{\gamma}_1$ ist nicht zu γ_3 homotop

$$H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)$$

$$H(0, t) = (1 - 0)\gamma(t) + 0\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$$

$$H(1, t) = (1 - 1)\gamma(t) + 1\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t)$$

$$H(s, 0) = (1 - s)\gamma(0) + s\tilde{\gamma}(0) = (1 - s)\gamma(1) + s\tilde{\gamma}(1) = H(s, 1)$$

γ und $\tilde{\gamma}$ homotop in U :

$$|H(s, t)| = |(1 - s)\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)| \leq |1 - s| \cdot |\gamma(t)| + |s| |\tilde{\gamma}(t)|$$

etc...

Cauchy Integralsatz:

Falls $f \in O(U)$ und γ nullhomotope Kurve

$$\text{Dann } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

γ nullhomotop $\Leftrightarrow \gamma$ homotop zur konstanten Kurve

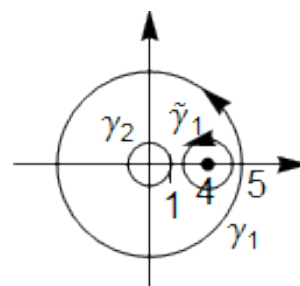
(etwa $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0$)

Bemerkung:

Für $f \in O(\mathbb{C})$ gilt für alle geschl. Kurven γ , dass $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

4.2 Beispiel zu Homotopiesatz

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= 5e^{2\pi it} \\ \gamma_2(t) &= e^{2\pi it} \\ \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-4} dz &= \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{1}{z-4} dz = \int_0^1 \frac{1}{4+e^{2\pi it}-4} + 2\pi i e^{2\pi it} dt \\ &= i\pi \int_0^1 1 dt = 2\pi i \\ \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-4} &= \int_0^1 \frac{1}{5e^{2\pi it}-4} 2\pi i e^{2\pi it} dt \\ \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-4} dt &= 0 \text{ (da } \gamma_2 \text{ nullhomotop in } \mathbb{C} \setminus \{0\}) \end{aligned}$$



Sei $f \in O(U)$ und es ex. die Stammfkt. $F \in O(U)$ mit $F' = f$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{Dann } \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1))$$

5 Tutorium vom 27.1.2011

5.1 Singularitäten

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

- 1) hebbare Sgt. $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ ex. Hauptteil der Laurententw $|_a = 0$
- 2) Pol der Ordnung $k \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$ ex. Hauptteil der Laurententw $|_a$ ist endl. Summe
- 3) wesentliche Sgt. \Rightarrow sonst Hauptteil der Laurententw $|_a$ hat ∞ viele Koeff.

zu 1) $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ hat hebb. Sgt. bei $z=0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin(z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} = 1 \end{aligned}$$

zu 2) $f(z) = \frac{1}{z^2+1-\cos(z)}$ singularär bei $z=0$, Pol d. Ordnung 2

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z^k \frac{1}{z^2+1-\cos(z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^k}{z^2+1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^k}{z^2+1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^k}{\frac{3}{2}z^2 - \frac{z^4}{24} + \dots} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^k}{z^2(\frac{3}{2} - \frac{z^2}{24} + \dots)} \\ \text{mit } k=2: \dots &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{z^2}{24} + \dots} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{noch zu 2) } (T_{\pi} \sin)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(\pi)}{k!} (z - \pi)^k, \quad \sin^{(k)}(\pi) = \begin{cases} \sin(\pi) = 0 & k = 4n \\ \cos(\pi) = -1 & k = 4n + 1 \\ -\sin(\pi) = 0 & k = 4n + 2 \\ -\cos(\pi) = 1 & k = 4n + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (T_{\pi} \sin)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z - \pi)^{2k+1}$$

Beh.: $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ hat Pole der Ordn. 1 bei $\bar{k}\pi, \bar{k} \in \mathbb{Z}$

$$(T_{\bar{k}\pi} \sin)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\bar{k}+1}}{(2\bar{k}+1)!} (z - \bar{k}\pi)^{2l+1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \bar{k}\pi} \frac{z(z-\bar{k}\pi)^1}{(-1)^{\bar{k}+1}(z-\bar{k}\pi) + (-1)^{\bar{k}+2} \frac{(z-\bar{k}\pi)^3}{3!} + \dots} = \lim_{z \rightarrow \bar{k}\pi} \frac{z(z-\bar{k}\pi)}{(z-\bar{k}\pi)((-1)^{\bar{k}+1} + (-1)^{\bar{k}+2} \frac{(z-\bar{k}\pi)^2}{3!})}$$

$$= (-1)^{\bar{k}-1} \bar{k}\pi < \infty$$

zu 3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, singularär bei $z=0$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} \lim_{z \rightarrow 0} z^k \exp(\frac{1}{z}) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k (1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} z^k - z^{k-1} + \frac{1}{2} z^{k-2} - \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} z^{k-k} + (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{z} + \dots$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \lim_{z \rightarrow 0} z^k \exp(\frac{1}{z}) \text{ ex. nicht}$$

$$\Rightarrow f \text{ hat bei } z=0 \text{ eine wesentl. Sgt.}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} \text{ Sgt. falls } \sin(\frac{1}{z}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = k\pi \Leftrightarrow z = \frac{1}{k\pi}, \quad z_n = \frac{1}{n\pi}$$

$P = \{\frac{1}{n\pi} | n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ hat HP bei $z = 0 \Rightarrow$ bei $z=0$ Sgt. aber nicht isoliert.

5.2 Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n, \quad (z_0 \text{ Entwicklungspunkt})$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{n<0} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \oint_{|z-z_0|=\rho} \hat{=} \int_{\gamma} \quad (\text{mit } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t})$$

Beispiele:

$$1) f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}}_{HT} + \underbrace{0}_{NT} \quad (\text{Bei Entw.pkt } z=0)$$

$$2) f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3} + \cos(\frac{1}{z})z^2, \quad \text{L Entw. bei } z=0:$$

$$f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}}{z^3} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\frac{1}{z})^{2k} \right) z^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2(k-1)}$$

$$= z^{-2} - \frac{1}{3!} z^0 + \frac{1}{5!} z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2(k-1)} + z^2 - \frac{1}{2!} z^0 + \frac{1}{4!} z^{-2} + \dots = 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2(k-1)}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} z^{-2k}}_{HT} + \underbrace{\frac{25}{24} z^{-2} - \frac{2}{3} + \frac{121}{120} z^2 + \sum_{k=2}^{\infty} k}_{NT} = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{2k}$$

$\Rightarrow f$ hat Sgt. bei $z=0$, die wesentlich ist.

5.3 Trick: Cauchy-Integral-Formel

Es gilt:

$$2\pi i f(a) = \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in B(z_0, \rho)$$

$$c_{n,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Beispiele:

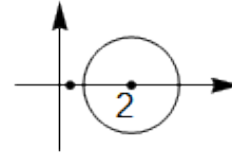
$$\text{a) } \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} dz = \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f(z)} \frac{1}{(z-2)^2}$$

$$= \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-2)^2} = 2\pi i c_{1,2}(f)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = -2\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-\underbrace{(z-2)}_{<1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k \quad (\text{geom. Reihe})$$

$$\text{b) } \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$



Trainingsblatt zur Funktionentheorie

Erstellt von Tibor Kovacs am 03.02.2011

- Was besagt der Cauchysche Integralsatz?
 - Welche Aussage trifft der Riemannsches Hebbarkeitssatz?
 - Wann heißt eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph?

2. Bestimmen sie folgende Integrale

$$(a) \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^2} dz \quad (b) \oint_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz \quad (c) \oint_{|z|=1} \frac{z+2}{z^2+3z} dz \quad (d) \oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$$

$$(e) \oint_{|z|=0.001} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (f) \oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) z^3 dz \quad (g) \oint_{|z+\sqrt{17}|=42} e^{z^2+z+1} dz$$

$$(h) \oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^3}\right) z^3 dz \quad (i) \oint_{|z|=|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz, \alpha \neq \beta \quad (j) \oint_{|z-i|=5} \frac{2z^2+4z-1}{z} dz$$

3. Bestimmen Sie die Residuen mit dem Entwicklungspunkt 0 der Funktionen

- $f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)z^5$
- $f_2(z) = z^{-2}(\cos^2(z^2) + 2\sin^2(z^2) - 1)$
- $f_3(z) = \cos^2\left(\frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{z}\right)$
- $f_4(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$
- $f_5(z) = \frac{1}{1-z}$

Hinweis: Verwenden Sie zuerst die Additionstheoreme um (b) und (c) angenehmer zu bekommen. Für (c) könnte $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ hilfreich sein.

4. Bestimmen Sie die Laurententwicklung

- im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ von der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}$$

- im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z+1| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ von der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z+z^2}$$

5. Betrachten Sie die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{6\pi it} + e^{2\pi it + \ln(0.01)}$. Bestimmen Sie mittels geeigneter Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Umlaufzahl $\nu_\gamma(0)$.

Hinweis: Durch eine kleine Umformung ist der eine Summand als „kleine Störung“ zu erkennen.

6. Betrachten Sie die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{2\pi nit}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und f eine Funktion, die auf einer offenen Menge U mit $\bar{K} \subset U$ bis auf isolierte Singularitäten holomorph ist. Außerdem sei keine Singularität von f enthalten in ∂K . Verifizieren Sie hierfür die Gleichung:

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i \cdot \nu_\gamma(0) \sum_{\alpha \text{ Sing.} \in K} \text{Res}_\alpha f$$

Hinweis: Die Funktion e^{it} ist 2π -periodisch.

6 Tutorium vom 3.2.2011

Trainingsblatt

6.1 Aufgabe 2

Cauchy Integralform

$$2\pi i f(a) = \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

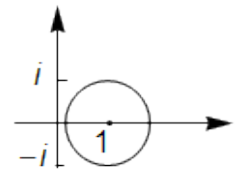
Laurent-Koeffizient

$$c_{M,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$a) \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$$

(nach Cauchy-Integralsatz, da Kurve nullhomotop in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$)

Integrand ist singularär bei $z = i, -i$



$$b) \oint_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{1}{z+i} \underbrace{\frac{1}{z-i}}_{f(z)} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{f(z)}{z+i} dz$$

$$= 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = -\pi$$

Alternativ:

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \sum_{\alpha \in \{-i\}} \text{Res}_{\alpha} \frac{1}{1+z^2} \quad (\text{Residuen-Kalkül})$$

Bestimme Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{1+z^2}$ am Entwicklungspunkt $-i$:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i+z+i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{-2i} \frac{1}{1-\frac{1}{2i}(z+i)} \frac{1}{z+i}$$

geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad |q| < 1$$

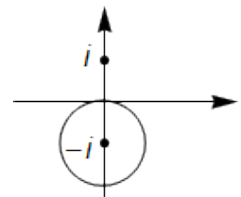
$$\Rightarrow \dots = \frac{1}{-2i} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2i}(z+i)\right)}_{|\cdot| = \frac{1}{2}|z+i|}} \frac{1}{z+i}$$

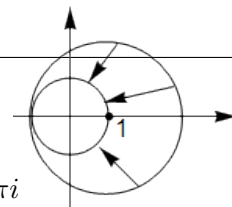
$$= -\frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^k (z+i)^k \right) \frac{1}{z+i} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{(2i)^{k+1}} (z+i)^{k-1}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2i}}_{c_{-1,-i}} (z+i)^{-1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{(2i)^2}\right)}_{c_0} (z+i)^0 + \underbrace{\left(-\frac{1}{(2i)^3}\right)}_{c_1} (z+i)^2 + \dots$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2i}\right)}_{c_{-1,-i}} \frac{1}{1+z^2}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i}$$





d) $\oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$ Integrand sing. bei $z = 0$
 $\oint_{|z-0|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \oint_{|z-0|=1} \frac{\cos(z)}{(z-0)^{2+1}} dz = c_{2,0}(\cos(z)) \cdot 2\pi i$
 (Homotopiesatz)

$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots = (z-0)^0 + 0(z-0)^1 + (-\frac{1}{2})(z-0)^2 + \dots$
 $\Rightarrow \dots = -\frac{1}{2}2\pi i = -\pi i$

Alternative: Residuen-Kalkül

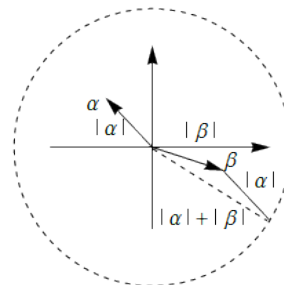
$\dots = 2\pi i \sum_{\alpha \in \{0\}} \text{Res}_\alpha \left(\frac{\cos(z)}{z^3} \right) = 2\pi i \text{Res}_0 \left(\frac{\cos(z)}{z^3} \right)$

$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}{z^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-3}$

Residuum bei $k = 1 \Rightarrow \text{Res}_0 \left(\frac{\cos(z)}{z^3} \right) = \frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1)!} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \dots = -\frac{1}{2}2\pi i = -\pi i$

6.2 Beispiel 1



$\oint_{|z|=|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz = 2\pi i \sum_{\sigma \in \{\alpha, \beta\}} \text{Res}_\sigma \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \right)$
 $\text{Res}_\alpha \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\alpha|=\rho} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz, \text{ mit } f(z) = \frac{1}{z-\beta}$
 $= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-\beta}$

$\text{Res}_\beta \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\beta|=\rho} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\beta|=\rho} \frac{g(z)}{z-\beta} dz, \text{ mit } g(z) = \frac{1}{1-\alpha}$
 $= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i g(\beta) = \frac{1}{\beta-\alpha} = -\frac{1}{\alpha-\beta}$

6.3 Aufgabe 4

a) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ Die Laurent-Entwicklung im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$

Wir wollen die Form $\frac{1}{1-q}$:

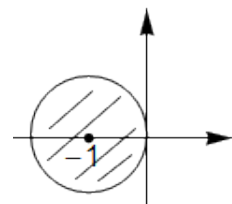
$\frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(-\frac{1}{z^2}\right)}_{|\cdot| \frac{1}{|z|^2} < 1}}$ (geom. Reihe)

$= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^k = \frac{1}{z} (-1)^k z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k-1}$
 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

$\frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{1 - \underbrace{\left(-z^2\right)}_{|\cdot| < 1}} = z \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}$

b) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}, \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z+1| < 1\}$

$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{-1+z+1} \frac{1}{z+1} = (-1) \frac{1}{1 - \underbrace{\left(z+1\right)}_{|\cdot| < 1}} \frac{1}{z+1}$



$$= (-1) \frac{1}{z+1} \sum_{k=0}^{\infty} (z+k)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)(z+1)^{k-1}$$

7 Tiborium vom 7.2.2011

Trainingsblatt - 2. Teil

7.1 Formeln

Cauchy-Integralformel:

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Laurent-Koeffizient:

$$c_{n,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

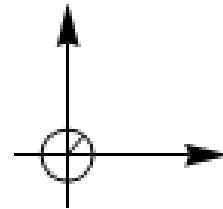
Residuen-Kalkül:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\alpha \text{ sing.} \in \text{Bild}(\gamma)} \text{Res}_{\alpha} f$$

$$\text{Res}_{\alpha} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}$$

7.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \text{e) } \oint_{|z|=0,001} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \oint_{|z|=0,001} \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz = \oint_{|z|=0,001} \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{(z-0)^{0+1}} dz = c_{0,0}(\cos\left(\frac{1}{z}\right)) 2\pi i \\ \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{0!}}_{c_{0,0}} z^0 + \underbrace{\frac{(-1)}{2!}}_{c_{-2,0}} z^{-2} + \underbrace{\frac{1}{4!}}_{c_{-4,0}} z^{-4} \\ &\Rightarrow c_{0,0}(\cos\left(\frac{1}{z}\right)) 2\pi i = 1 \cdot 2\pi i = 2\pi i \end{aligned}$$



Alternativ:

$$\oint_{|z|=0,001} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_0\left(\frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$\text{Rest analog: } \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{-2k-1}$$

Suche k, so dass $-2k-1 = -1 \Leftrightarrow k=0$

$$\Rightarrow \text{Res}_0\left(\frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) = (-1)^0 \frac{1}{(2 \cdot 0)!} = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi i \cdot \text{Res}_0\left(\frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

$$\text{f) } \oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) z^3 dz = \oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{(z-0)^{-4+1}} dz = c_{-4,0}(\sin\left(\frac{1}{z}\right)) 2\pi i$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1} = \frac{1}{1!} z^{-1} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-5} - \dots$$

$$\Rightarrow c_{-4,0}(\sin(\frac{1}{z})) = 0$$

$$\Rightarrow c_{-4,0}(\sin(\frac{1}{z}))2\pi i = 0 \cdot 2\pi i = 0$$

$$g) \oint_{|z+\sqrt{17}|=42} e^{z^2+z+1} dz = 0$$

$$|z+\sqrt{17}|=42$$

(Cauchy-Integralsatz: Da Integrand keine Sing. hat)

$$h) \oint_{|z|=1} \exp(\frac{1}{z^3}) z^3 dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(\exp(\frac{1}{z^3}) z^3) \quad (\text{Residuen-Kalkül})$$

$$z^3 \cdot \exp(\frac{1}{z^3}) = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{1}{z^3})^k = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-3k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-3k+3} = \frac{1}{0!} z^3 + \frac{1}{1!} z^0 + \frac{1}{2!} z^{-3} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_0(\exp(\frac{1}{z^3}) z^3) = 0$$

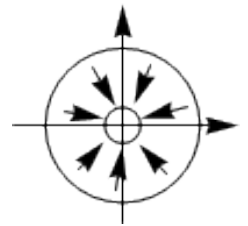
$$\Rightarrow \dots = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

$$j) \oint_{|z-2|=5} \frac{2z^2+4z-1}{z} dz = \oint_{|z|=1} 2z + 4 - \frac{1}{z} dz$$

$$\text{Linearität d. Integrals: } \dots = \underbrace{\oint_{|z|=1} 2z dz}_{=0} + \underbrace{\oint_{|z|=1} 4 dz}_{=0} - \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

* : 0, da hol. Stammfunktion ex.

$$\Rightarrow \dots = - \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -2\pi i \quad (\text{Cauchy-Integral-Formel})$$



7.3 Aufgabe 3

$$a) f_1(z) = \exp(\frac{1}{z}) z^5 = z^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{1}{z})^k = z^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+5}$$

$$\operatorname{Res}_0 f_1 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

$$b) f_2(z) = z^{-2}(\cos^2(z^2) + \underbrace{2 \sin^2(z^2)}_{\sin^2(z^2)+1-\cos^2(z^2)} - 1) = z^{-2} \sin^2(z^2)$$

$$\sin(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2} = z^2 - \frac{1}{3!} z^6$$

$$\Rightarrow \dots = z^{-2} (z^2 - \frac{1}{3!} z^6 + \dots) (z^2 - \frac{1}{3!} z^6 + \dots)$$

$$= 2^{-2} (z^4 - \frac{1}{3} z^8 + \frac{1}{36} z^{12} + \dots) = z^2 - \frac{1}{3} z^6 + \frac{1}{36} z^{10}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_0(f_2) = 0$$

$$c) f_3(z) = \cos^2(\frac{1}{z}) - \sin^2(\frac{1}{z}) = \cos(\frac{1}{z}) \cos(\frac{1}{z}) - \sin(\frac{1}{z}) \sin(\frac{1}{z}) = \cos(\frac{1}{z} + \frac{1}{z})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k)!} z^{-2k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_0 f_3 = 0$$

$$d) f_4(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$$

$$\operatorname{Res}_0 f_4 = \operatorname{Res}_0(\frac{\sin(z)}{z^5}) = \frac{\sin^{(4)}(0)}{4!} = 0$$

$$e) f_5(z) = \frac{1}{z-1} \quad \text{O.E. } |z| < 1$$

$$\Rightarrow \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Rightarrow \operatorname{Res}_0 f_5 = 0$$

7.4 Aufgabe 4

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ Laurent-Entw. im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-1| < 1\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{-1+z-1} = \frac{1}{z-1} (-1) \frac{1}{1-\underbrace{(z-1)}_{| \cdot | < 1}} \\ &= \frac{-1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -(z-1)^{k-1} \end{aligned}$$

Im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} | |z| \geq 2\}$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k \right) \text{ etc.}$$

7.5 Aufgabe 5

$$\gamma(t) = e^{6\pi it} + e^{2\pi it + \ln(0,01)} = e^{6\pi it} + \underbrace{e^{\ln(0,01)} e^{2\pi it}}_{\text{kleine Störung}}$$

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$H(s, t) = e^{6\pi it} + (1-s) \cdot 0,01 e^{2\pi it}$ ist Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von γ nach $\tilde{\gamma} = e^{6\pi it}$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$H(0, \cdot) = \gamma,$$

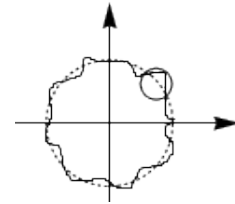
$$H(1, \cdot) = \tilde{\gamma},$$

$$H(s, 0) = H(s, 1),$$

$$\begin{aligned} |H(s, t) - 0| &= |e^{6\pi it} + (1-s) \cdot 0,01 e^{2\pi it}| \geq \underbrace{|e^{6\pi it}|}_{=1} - |(1-s) \cdot 0,01 e^{2\pi it}| \\ &= |1 - |1-s| \cdot 0,01 \underbrace{|e^{2\pi it}|}_{=1}| = |1 - (1-s) \cdot 0,01| \geq 0,99 > 0 \end{aligned}$$

$$\nu_{\gamma}(0) = \nu_{\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{e^{6\pi it}} 2\pi i e^{6\pi it} dt = \frac{6\pi i}{2\pi i} \int_0^1 1 dt = 3$$



Trainingsblatt2 für Analysis III

Erstellt von Tibor Kovacs am 10.02.2011

1. (a) Gegeben sei die Kurve $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = (t^2 + 1)e^{2it}$. Bestimmen Sie mittels geeigneter Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Umlaufszahl $\nu_\gamma(0)$.
- (b) Bestimmen Sie die Umlaufszahl $\nu_\gamma(0)$ von der Kurve $\gamma : [0, 2\pi(n+k)i] \rightarrow \mathbb{C}$ für $4n \neq 3k$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{4it} & t \in [0, 2\pi ni] \\ e^{-3it} & t \in [2\pi ni, 2\pi(n+k)i] \end{cases}$$

2. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z+1)}$$

im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung und Geometrische Reihe.

3. (a) Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y - 2x \\ \dot{y} &= xy - y + \lambda x \end{aligned}$$

- i. Untersuchen Sie die Stabilität der Nulllösung in Abhängigkeit von λ .
 - ii. Bestimmen Sie für $\lambda = 0$ alle Gleichgewichtslösungen und untersuchen Sie jeweils die Stabilität.
- (b) Nun sei ein lineares Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -2u - v \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $V(u, v) = \frac{7}{4}u^2 + \frac{1}{2}uv + \frac{3}{4}v^2$ eine strikte Liapolovfunktion für f ist.

4. Bestimmen Sie folgende Residuen

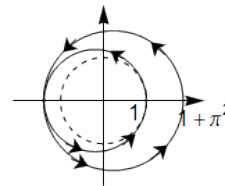
- (a) Von der Funktion $f(z) = \frac{\sin(\cos(z))}{(z-3)^3}$ an der Stelle 3.
- (b) Von der Funktion $f(z) = \sin^2\left(\frac{3}{z}\right)z^5$ an der Stelle 0.
- (c) Von der Funktion $f(z) = \frac{\exp(2z)}{z^{10}}$ an der Stelle 0.
- (d) Von der Funktion $f(z) = (\alpha z + \beta z^{-3})^n$ an der Stelle 0 für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \neq 0$.

8 Tutorium vom 10.2.2011

2. Trainingsblatt

8.1 Aufgabe 1

a) Gegeben sei $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \underbrace{(t^2 + 1)}_{\in \mathbb{R}, \text{ Streckfaktor}} \underbrace{e^{2it}}_{\text{Kreis}}$



γ von $-\pi$ bis 0 betrachten

e-Term hat das Argument $-2\pi i$ bis 0

Streckfaktor hat Werte von $1 + \pi^2$ bis 1

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma_2(t) = e^{4\pi i t}$$

passe Parameterbereich an γ an:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi t - \pi) = ((2\pi t - \pi)^2 + 1)e^{\overbrace{2i(2\pi t - \pi)}^{4\pi i t - 2\pi i}}$$

Lin. Homotopie: $H(s, t) = (1 - s)\tilde{\gamma}(t) + s\gamma_0(t)$

z.z. $|H(s, t) - 0| > 0$

Rechnung:

$$\begin{aligned} |H(s, t)| &= |(1-s)((2\pi t - \pi)^2 + 1)e^{4\pi i t} + se^{4\pi i t}| = |((1-s)((2\pi t - \pi)^2 + 1) + s)e^{4\pi i t}| \\ &= |((1-s)((2\pi t - \pi)^2 + 1) + s)| \\ &= |(1-s)((2\pi t - \pi)^2 + 1) + s| = |1 + (1-s)\underbrace{(2\pi t - \pi)^2}_{\geq 0}| \geq 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\nu_\gamma(0) = \nu_{\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi i t}} 4\pi i e^{4\pi i t} dt = \frac{4\pi i}{2\pi i} = 2$$

b) $\gamma : [0, 2\pi(n+k)i] \rightarrow \mathbb{C}$, $4\vec{\nabla} \neq 3k$, $n, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \nu_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi(n+k)} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi n} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt + \int_{2\pi n}^{2\pi(n+k)} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi n} \frac{1}{e^{4it}} 4ie^{4i} dt + \int_{2\pi n}^{2\pi(n+k)} \frac{1}{e^{-3it}} (-3i)e^{-3it} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{(4i(2\pi n - 0))}_{=8\pi i n} + \underbrace{(-3i)(2\pi(n+k) - 2\pi n)}_{=2\pi k} = \frac{8\pi i n - 6\pi i k}{2\pi i} = 4n - 3k \end{aligned}$$

8.2 Aufgabe 3

$$\text{a) i) } \left. \begin{array}{l} \dot{x} = x^2 + y - 2x \\ \dot{y} = xy - y + \lambda x \end{array} \right\} = f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2x \\ xy - y + \lambda x \end{pmatrix} \Rightarrow Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 & 1 \\ y + \lambda & x + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Stab der Nulllsg.

$$D_2 f(t, x) = Df(x) \text{ (falls f autonom)}$$

Bestimme EW:

$$\chi(t) = \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (2+t)(1+t) - \lambda = t^2 + 3t + 2 - \lambda$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + \lambda} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}$$

\Rightarrow Falls $\lambda < -\frac{1}{4}$ dann sind EW komplex.

$$\Rightarrow \Re(t_{1/2}) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{Lsg. stabil}$$

Falls $\lambda > 2$, dann ist OE $t_1 < 0 < t_2 \Rightarrow$ Lsg. instabil

$$\max_{\rho \in \sigma(Df(x_0))} \Re(\rho) < 0 \Rightarrow \text{stabil}$$

$$\text{ii) Falls } \lambda = 0 \Rightarrow f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2x \\ xy - y \end{pmatrix}$$

Suche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2x \\ xy - y \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x + y \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow 0 = xy - y$$

$$\Rightarrow 0? x(-x^2 + 2x) + x^2 - 2x = x \underbrace{(-x^2 + 2x + x - 2)}_{-x^2 + 3x - 2}$$

$$= -x(x^2 - 3x + 2) = -x(x-2)(x-1)$$

$$\Rightarrow \text{Gleichgewichtslösungen: } 1: x = 0, y = 0$$

$$2: x = 1, y = 1$$

$$3: x = 2, y = 0$$

Falls $(x, y) = (0, 0)$ gilt nach (i) stabil, da $\lambda = 0 < 2$

$$\text{Falls } (x, y) = (1, 1) \Rightarrow Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW sind } \pm \Rightarrow \text{instabil}$$

$$\text{Falls } (x, y) = (2, 0) \Rightarrow Df(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW sind } 2, 1 \Rightarrow \text{instabil}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -2u - v \end{array} \right\} =: f(u, v)$$

$$\text{z.z. } V(u, v) = \frac{7}{4}u^2 + \frac{1}{2}uv + \frac{3}{4}v^2$$

ist strikte Liapunov-Funktion

$$\langle \nabla V(u, v), f(u, v) \rangle \leq 0$$

$$\wedge \quad \text{---} \text{---} \text{---} = 0 \Leftrightarrow f(u, v) = (0, 0)$$

$$\nabla V(u, v) = \left(\frac{7}{2} \cdot 2u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u + \frac{3}{4} \cdot 2v \right)$$

$$= \langle \nabla V(u, v), f(u, v) \rangle = v \left(\frac{7}{2}u + \frac{1}{2}v \right) + (-2u - v) \left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v \right)$$

$$= \frac{7}{2}uv + \frac{1}{2}v^2 - u^2 - 3uv - \frac{1}{2}uv - \frac{3}{2}v^2$$

$$= -u^2 - v^2 = - \underbrace{(u^2 + v^2)}_{\geq 0} \leq 0$$

$$\text{„=0“} \Leftrightarrow (u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow f(u, v) = (0, 0)$$

8.3 Beispiel aus Blatt 14

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\substack{\alpha \text{ Sngt} \\ \Im(\alpha) > 0}} \text{Res}_{\alpha} \left(\frac{\cos(z)}{1+z^2} \right)$$

*: da Integrand y-Achsen-symmetrisch

Integrand ist singularär bei $\pm i$

$$\Rightarrow \dots = \pi i \text{Res}_i \frac{\cos(z)}{1+z^2} = \pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-i|=\rho} \frac{\cos(z)}{(z-i)(z+i)} dz$$

(Cauchy-Integral-Formel) mit $f(z) = \frac{\cos(z)}{z+i}$

$$\dots = \frac{1}{2} 2\pi i f(i) = \pi i \frac{\cos(i)}{2i} = \frac{\pi}{2} \cos(i) = \frac{\pi}{2e}$$