

# 1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 6 12.12.12

## 1.1 Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & -3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = |z - 7| \leq 0.75$$

$$k_1 = |z + 3| \leq 1.25$$

$$k_1 = |z - 1.5| \leq 1.5$$

$$\lambda_1 \in K_2$$

$$|\lambda - \lambda_1| \leq |\lambda - \lambda_i| \quad i = 2, 3 \quad \lambda = -3A' = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 10 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4.5 \end{pmatrix} A' = LR$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/40 & 1 & 0 \\ 1/20 & -158 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 10 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/100 & 79/80 \\ 0 & 0 & 321/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i) : x^{(0)} = y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$iii) \lambda \approx y^{(3)T} A y^{(3)} \approx -3.22$$

## 1.2 Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} -5.7 & -61.1 & -32.9 \\ 0.8 & 11.9 & 7.1 \\ -1.1 & -11.8 & -7.2 \end{pmatrix}$$

Berechnung von  $w_1$ :

$$(A - \lambda I)w_1 = \begin{pmatrix} -9.7 & 61.1 & -32.9 \\ 0.8 & 7.9 & 7.1 \\ -1.1 & 11.8 & 11.2 \end{pmatrix} w_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9.7 & 611 & -329 \\ 8 & 79 & 71 \\ -11 & -118 & -112 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -97 & -611 & -329 \\ 0 & 2775/97 & 4255/97 \\ 0 & -4725/97 & -7245/97 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -97 & -611 & -329 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 94 \\ -23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Berechnen von  $s_1$ :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23/94 & 1 & 0 \\ -15/94 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -23/94 & 1 & 0 \\ 15/94 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 A S_1^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & 61.1 & -33.9 \\ 0 & -61/10 & -19/20 \\ 0 & -41/10 & -39/20 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -61/20 & -19/20 \\ -41/20 & -39/20 \end{pmatrix}$$

Berechnen des kleinsten EW von B durch Schätzung des EW durch Gershgorin-Kreise + Approximation durch Inverse-Iteration:

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 61/20| \leq 19/20\} \Rightarrow \text{Betragsm. kl. EW: } \lambda_2 \approx -39/20 = s$$

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 39/20| \leq 41/20\}$$

$$(BS - I) = \begin{pmatrix} -22/10 & -19/20 \\ 41/20 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne  $(B - SI)^{-1}$

$$\dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -20/41 \\ -20/19 & 440/779 \end{pmatrix}$$

Berechnung von  $w_2$ :

$$\text{Sei } x_0 = (1, 0)$$

$$(B - sI)^{-1}x_0 = x_1 = (0, -20/19)^T$$

$$(B - sI)^{-1}x_1 = x_2 = (400/779, -8800/14801)^T$$

$$\lambda_k \approx x_k^T B x_k / \|x_k\|_2^2$$

$$\dots = -0.9359$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 / -0.9359 \approx -1$$

### 1.3 Aufgabe

a) 1. Beh.:  $\sigma(A) = \sigma(SAS^{-1})$

Bew:

Sei  $\lambda \in \sigma(A)$  und  $x$  EV dazu, dann gilt:

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

Setze  $y := Sx$ , dann ist  $x = S^{-1}y$   $y \neq 0$

und es gilt:

$$AS^{-1}y = \lambda S^{-1}y, \text{ sowie}$$

$$SAS^{-1} = S\lambda S^{-1}S y = \lambda SS^{-1} y = \lambda y$$

2. Beh:  $\sigma(SAS^{-1}) = \sigma(B) \cup \sigma(C)$

Bew:

Sei  $\lambda \in \sigma(SAS^{-1})$  EW und  $x \neq 0$  EV dazu, dann gilt:

$$SAS^{-1}x = \lambda x \text{ mit}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$SAS^{-1}x = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx^* + Dx^{**} \\ Bx^{**} \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } SAS^{-1}x = \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^* \\ \lambda x^{**} \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$Cx^* + Dx^{**} = \lambda x^* \text{ und } Bx^{**} = \lambda x^{**}$$

Folgt:  $\lambda \in \sigma(B)$  falls  $x^{**} \neq 0$

Für  $x^{**} = 0$  gilt sofort  $Dx^{**} = 0$  und  $x^* \neq 0$  ( $dx \neq 0$ )

Folgt:  $Cx^* = \lambda x^* \Rightarrow \lambda \in \sigma(C)$

Sei  $\lambda \in \sigma(C)$ , dann es.  $x^* \neq 0$ , so dass  $Cx^* = \lambda x^*$

Für  $x = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt:  $SAS^{-1}x = \begin{pmatrix} Cx^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda x$

Sei  $\lambda \in \sigma(V) \setminus \sigma(C)$ , dann ex.  $x^{**} \neq 0$ , so dass  $Bx^{**} = \lambda x^{**}$ .

Da  $C - \lambda I$  nicht sing. ( $\lambda \notin \sigma(C)$ ) ex.  $x^*$  mit

$$(C - \lambda I)x^* = -Dx^{**}$$

Setze  $x = \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix} \Rightarrow$  folgt:  $Cx^* + Dx^{**} = \lambda x^*$

und damit  $\begin{pmatrix} Cx^* + Dx^{**} \\ Bx^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^* \\ \lambda x^{**} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma(SAS^{-1})$  wg.  $SAS^{-1}x = \lambda x$

- b) Nach Satz aus der Vorlesung hat S die gewünschte Eigenschaft falls die letzten n-m Komp. von  $Sv_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  Null sind, d.h.  $V := [v_1, \dots, v_m]$  folgt:

$$SV = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen lediglich die Elimination von V (Gauß, Householder,...)

#### 1.4 Anmerkung

### Polynominterpolation mit Newton

Man berechnet das Interpol. polynom durch

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

Allerdings müssen vorher die Koeff.  $a_i$  durch Lösen des LGS:

$$p_N(x_0) = a_0 = y_0$$

$$p_N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\vdots$$

$$p_N(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots$$

$$+ a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = y_n$$

$\Rightarrow$  Rekursive Methode d. dividierten Differenzen:

$$y[x_i] := y_i \text{ für } i = 0, \dots, n$$

$$y[x_i, \dots, x_{i+k}] := \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - y[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Insges.:

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^n y[x_0, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

**Vorteil:** Bereits berechnete  $a_i$  müsse bei zusätzl. Stützstellen nicht neu berechnet werden

**Nachteil:** aufwändige Berechnung der  $a_i$  im Vergl zu Lagrange

## Hermite-Interpol.

Gesucht: Polynom, das einen geg. Anzahl v. Stützstellen interpol.

Jetzt: Verhalten d. Ableitungen an den Stützst. vorgeschrieben, d.h.

$p \in \mathbb{P}$  mit  $p^{(k)}(x) = y_i^{(k)}$  mit  $i = 0, \dots, n$  und  $k = 0, \dots, \mu_i$

wobei  $n = m + \sum_{i=0}^m \mu_i$

**Dabei ist nicht  $\text{grad}(p) = n$  gefordert!**

⇒ Gleichungssystem für Koeff aufstellen ⇒ lösen

**Polynom von Grad 3:**

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sei durch vier Stützstellen  $(x_0, y_0), \dots, (x_3, y_3)$  eindeutig bestimmt.

Dasselbe Polynom ist jedoch auch durch alle seine Ableitungen an jew. einer Stützstelle eindeutig bestimmt:

$$f(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$$

$$f'(x_i) = 3ax_i^2 + 2bx_i + c$$

$$f''(x_i) = 6ax_i + 2b$$

$$f'''(x_i) = 6a$$

Das Hermite Polyn. führt diese beiden Eigenschaften zusammen.

## Newton-Darstellung für Ableitungen

Sind Stützstellen  $(x_0, f(x_0)), (x_0, f'(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_1, f'(x_1))$  gegeben, dann lässt sich eine Newton-Darst des Interpol. polynom. wie folgt angeben:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i N_i \quad \text{mit} \quad n = m + \sum_{i=0}^m \mu_i = 2 + 1 + 1 = 4$$

und  $c_i, N_i$ :

$$c_0 = f[x_0] \quad N_0 = 1$$

$$c_1 = f[x_0, x_0] \quad N_1 = (x - x_0)$$

$$c_2 = f[x_0, x_0, x_1] \quad N_2 = (x - x_0)^2$$

$$c_3 = f[x_0, x_0, x_1, x_1] \quad N_3 = (x - x_0)^2(x - x_1)$$

Für die div. Differenzen betrachtet man in diesem Fall die Stützstellen  $x_0, x_1$  sowie deren Vielfachheiten, d.h. man stellt das Rekursionsschema auf, indem man bei  $f[x_0], f[x_0], f[x_1], f[x_1]$  anfängt. Für die Berechnung der  $f[x_0, x_0]$  benutzt man allerdings die Formel:

$$f[x_0, \dots, x_R] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad \text{bei} \quad x_0 = \dots = x_R.$$