Numerik 1 Blatt 8 Julian Bergmann

Aufgabe 1

10

a) $p(x) = \sum_{i=0}^{3} y[x_0 \dots x_i]\, N_i(x)$

$N_i(x) = \prod_{0 \le j < i} (x - x_j) \quad \forall i > 0 \quad , \quad N_0(x) = 1$

$y[x_i \dots x_j] = \dfrac{y[x_i \dots x_{j-1}] - y[x_{i+1} \dots x_j]}{x_i - x_j} \quad \forall j \neq i \quad , \quad y[x_i] = y_i$

$y[x_0] = y[0] = 1$

$y[x_0 x_1] = y[0,1] = \dfrac{y[x_0] - y[x_1]}{x_0 - x_1} = \dfrac{1-4}{0-1} = 3$

$y[x_0 x_1 x_2] = y[0,1,2] = \dfrac{y[x_0 x_1] - y[x_1 x_2]}{x_0 - x_2}$

$y[x_1 x_2] = y[1,2] = \dfrac{4-3}{1-2} = -1$

$\Rightarrow y[x_0 x_1 x_2] = \dfrac{3+1}{0-2} = -2$

$y[x_0 x_1 x_2 x_3] = y[0,1,2,4] = \dfrac{y[x_0 x_1 x_2] - y[x_1 x_2 x_3]}{x_0 - x_3}$

$y[x_1 x_2 x_3] = y[1,2,4] = \dfrac{y[x_1 x_2] - y[x_2 x_3]}{x_1 - x_3}$

$y[x_2 x_3] = y[2,4] = \dfrac{y[x_2] - y[x_3]}{x_2 - x_3} = \dfrac{3-4}{2-4} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow y[x_1 x_2 x_3] = \dfrac{-1 - \frac{1}{2}}{1-4} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow y[x_0 x_1 x_2 x_3] = \dfrac{-2 - \frac{1}{2}}{0-4} = \dfrac{5}{8}$

$N_0(x) = 1 \quad , \quad N_1(x) = (x - x_0) = x$

$N_2(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x(x-1) = x^2 - x$

$N_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$\Rightarrow p(x) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + (-2)(x^2 - x) + \frac{5}{8}(x^3 - 3x^2 + 2x)$

$= \frac{5}{8}x^3 - \frac{31}{8}x^2 + \frac{25}{4}x + 1$

$\Rightarrow p(5) = \dfrac{27}{2}$

b)

			$+1$	0	1	$\frac{1-4}{0-1} = 3$	$\frac{+3+1}{-2} = -2$		
6	4	2	$+1$	1	4	$\frac{4-3}{1-2} = -1$	$\frac{-1-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{2}$	$\frac{-2-\frac{1}{2}}{-4} = \frac{5}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}+\frac{1}{10}}{-6} = \frac{-29}{240}$
	5	3	$+2$	2	3	$\frac{3-4}{2-4} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{-4} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{-5} = -\frac{1}{10}$	
		4	2	4	4	$\frac{4-5}{-2} = +\frac{1}{2}$			
				6	5				

$N_4(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x(x-1)(x-2)(x-4) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x$

$\Rightarrow p(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{31}{8}x^2 + \frac{25}{4}x + 1 + (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x)\left(-\frac{29}{240}\right)$

$= -\frac{29}{240}x^4 - \frac{353}{240}x^3 - \frac{137}{30}x^2 + \frac{173}{60}x + 1$

$\Rightarrow p(5) = \dfrac{25}{4}$

Numerik 1 Blatt 8 Julian Bergmann

Aufgabe 2

10

a) Das Interpolationspolinom ist eindeutig bestimmt und damit auch sein Höchstkoeffizent, welcher, wie man im Newton-Verfahren sieht:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} N_i \, y[x_0 \dots x_i] \quad , \quad N_j = \prod_{0 \le i < j} (x - x_i) \; \forall j > 0, \; N_0 = 1$$

der Koeffizient von N_n ist, also $y[x_0 \dots x_n]$ von n Wertepaare, unabhangig von ihrer Reihenfolge.

$\Rightarrow$ $y[x_0 \dots x_n]$ eindeutig bestimmt unabh. v. Reihenfolge

b) f Polynom $(n-1)$-ten Grades $\Leftrightarrow$ $f(x) = ax^0 + bx^1 + \dots + zx^{n-1} + 0 \cdot x^n$ mit $z \neq 0$

Von den N_i im Newton-Verfahren hat nur

$$N_n = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

n Multiplikationen von x mit sich selbst, also nur N_n den Summanden x^n.
Aus der Darstellung von N_n wird auch ersichtlich, das x^n in N_n keinen anderen Faktor als 1 besitzt (immer 1. Summand innerhalb d. Klammer).
Da $f(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i f[x_0 \dots x_i]$ im Newton-Verfahren festgelegt ist, besitzt x^n in $f(x)$ den Koeffizient $f[x_0 \dots x_n]$ (da x^n nur in N_n vorkommt!).
f Polynom $(n-1)$-Gerades $\Leftrightarrow$ Koeff. von $x^n = 0 = f[x_0 \dots x_n]$.

c) Newton-Identität (Theorem 4.4):

$$f(x) - p(x) = f[x_0 x_1 \dots x_n x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad f \in C^{n+1}([a,b]), \; x \in [a,b]$$

Cauchy-Fehler (Theorem 4.3):

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad , \; \xi_x \in [a,b], \; f \in C^{n+1}([a,b]), \; x \in [a,b]$$

Ohne letzte Stützstelle:

$$f[x_0 x_1 \dots x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$\Rightarrow \; f[x_0 x_1 \dots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \qquad \forall \xi_x \in [a,b], \; f \in C^n([a,b])$$