Nr. 1

-1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -3 & -18 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} l_{12} = \frac{3}{5} \\ l_{13} = \frac{1}{5} \end{array}$$

Pivot elem.?

Lösbarkeit prüfen!

-1

$$\Rightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 11/5 & 9/5 & 49/5 \\ 0 & 17/5 & 13/5 & 73/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 17/5 & 13/5 & 73/5 \\ 0 & 11/5 & 9/5 & 49/5 \end{array}\right) \Rightarrow l_{23} = \frac{11}{17}$$

$$\Rightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 17/5 & 13/5 & 73/5 \\ 0 & 0 & 2/17 & \frac{6}{17} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{R}$ $\underbrace{}_{c}$

$Rx = c$

Nr. 2

1. : $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0$ $(A \in \mathbb{R}^{n\times n})$

$x \in K^n \setminus \{0\} \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2. : $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $(\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n})$

$$\|A\lambda\| = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\cdot\lambda\|}{\|x\|}\right) = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{|\lambda|\cdot\|Ax\|}{\|x\|}\right)$$

$$= |\lambda| \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) = |\lambda| \cdot \|A\|$$

3. : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x,y \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $(A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$

$$\|A+B\| = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|}\right) = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|}\right)$$

$$\leq \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|}\right) = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right)$$

$$= \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) + \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right) = \|A\| + \|B\|$$

submultipl.: $\|x\cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ \forall x,y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$

$$\|A\cdot B\| = \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|(A\cdot B)\cdot x\|}{\|x\|}\right) \leq \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|A\|\cdot\|Bx\|}{\|x\|}\right)$$

$$= \|A\| \sup_{x\in K^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right) = \|A\| \cdot \|B\|$$

Für alle nat. Matrixnormen gilt: $\|\mathbb{1}_n\| = 1$ (n-dimensional)

$$\|\mathbb{1}_n\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1 \ \forall n > 1$$

Nr. 3

a)

n-1 Division für l_{ij}
(n-1)·(n+1) Multipl.

Führe diese Schritte für jede Spalte durch ~~[illegible]~~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right)$$

⇒ ~~n^2 Oper.~~ n^2+n-2

⇒ ~~n^3 Oper.~~ ~~[illegible]~~ $\sum_{i=2}^{n}(i^2+i-2)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right)$$

f. alle el. a_{ij}, $j>i$ 1 Mult.

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

$\Rightarrow \cancel{n^3+O(n^2)}$ ~~Oper.~~

+ 1 mal pro Zeile durch a_{ii} dividieren

$\Rightarrow \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n}(i^2+i-2) + \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=2}^{n} i^2 + n(n+1) - 2 - 2n + 2$$

$$= \frac{1}{6}(-6+n+3n^2+2n^3) + n^2 + n - 2n$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

b) Die für die Gauß-Eliminierung erforderlichen Schritte sind in $Ax_i = b_i$ bei gleichem A für alle i gleich. Da außerdem nur Zeilen-Operationen vorgenommen werden, kann statt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{n1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 = e_{ii} \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

n-Mal zu berechnen auch

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{n1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$\uparrow e_1 \; \uparrow e_2 \cdots \uparrow e_n$

berechnet werden.

Da dies exakt das Vorgehen der Matrix-Invertierung ist, erhält man hier $(Ax = \mathbb{1})$ für x auch A^{-1}

7,5/10