1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 7 19.12.12

1.3 Aufgabe

1. z.z.: Q ist obere Hessenberg-Matrix.
   Annahme: Q sei keine ob. Hes.-Matrix.
   Dann ex. i_0, j_0 mit $i_0 > j_0 + 1$ dergestalt, dass $q_{i_0,j_0} \neq 0$.
   OBdA dürfen wir annehmen, dass $q_{i_0,j}$ für alle $j < j_0$. Dann folgt:
   $$a_{i_0,j_0} = \sum_{k=1} n q_{i_0 k}\Gamma_{kj_0} = \sum_{k=1}^{j_0-1} \underbrace{q_{i_0 k}}_{=0}\Gamma_{kj_0} + q_{i_0 j_0}\Gamma_{j_0 j_0} + \sum_{k=j_0+1}^{n} \underbrace{q_{i_0 k}}_{=0}\Gamma_{kj_0}$$
   $$= g_{i_0 j_0}\Gamma_{j_0 j_0} \neq 0$$
   Da A nicht sing. Damit wäre A aber keine OHB.

2. Mit R obere Dreiecks-Matrix und Q OGB-Matrx gilt:
   $$r_{ij} = 0 fallsi > j \quad , \qquad q_{ij} = 0 \text{ falls } i > j+1$$
   Sei $i > j+1$, dann: $a'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ik} q_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_{ik} q_{kj} + \sum_{k=i}^{n} r_{ik} q_{kj}$
   Für $j = 1, ..., n-2$, da $k \geq i > j+1$

1.4 Präsenzaufgabe zu Blatt 9.1

> **Splineraum**
>
> Sei $X = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m > b\}$ eine Menge paarweise verschiedener Stützstellen (Knoten) und sei $k \in \mathbb{N}$.
> Dann ist der Spline-Raum $S_{X,k}$ definiert durch:
> $$S_{X,k} := \{f \in C^{k-1}[a,b] : f_{[x_i,x_{i+1}] \in \mathbb{P}^k \forall i \in \mathbb{N}}\}$$
> Der Raum besteht also aus Funktionen, die *zwischen* zwei benachbarten Stützstellen Polynome vom Grad k und außerdem *an* „glatt“ bis zur (k-1)–ten Ableitung sind.

Beispiele:

$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} x^5 & f\ddot{u}r\ x > 0 \\ -2x^5 & f\ddot{u}r\ x \leq 0 \end{cases}. \text{ Dann gilt:}$$

1. $f \in S_{\{-1,0,1\},5}$, denn:
   $f|_{[-1,0]} = -2x^2 \in \mathbb{P}^5$ und $f|_{[0,1]} = x^5 \in \mathbb{P}^5$ und $\mathbb{P}_{[-1,1]} \in C^4[-1,1]$
   da gilt:
   $f(-0) = f(+0) = 0$
   $f'(-0) = f'(+0) = 0$
   $f''(-0) = f''(+0) = 0$
   $f'''(-0) = f'''(+0) = 0$
   $f''''(-0) = f''''(+0) = 0$

2. $f \notin S_{\{-1,0,1\},6}$, obwohl
   $f|_{[-1,0]} = -2x^2 \in \mathbb{P}^5$, $f|_{[0,1]} = x^5 \in \mathbb{P}^5$ und $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6$

denn:

$$f^{(5)} = \begin{cases} 5! & \mathit{f\ddot{u}r}\ x > 0 \\ -2 \cdot 5! & \mathit{f\ddot{u}r}\ x \leq 0 \end{cases}$$

3. $f \notin S_{\{-1,0,1\},4}$, da f zwar „glatt“ genug (siehe 1.), aber $f|_{[-1,0]} \notin \mathbb{P}^4$ und $f|_{[0,1]} \notin \mathbb{P}^4$
4. $f \notin S_{\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\},5}$, da $f|_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ kein Polynom ist.
5. $f \in S_{\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\},5}$, denn die zusätzl. Knoten geben keine weiteren Informationen.

1.5 Anmerkung

Restglied

Das Restglied $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ (auch „Fehler d. Polynominterpol.“) von $f \in C^{n+1}[a,b]$ durch $p_n(x) \in \mathbb{P}^n$ kann wiefolgt dargestellt werden ($\rightarrow$ Vorlesung):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

mit $\xi = [\min\{x_0, ..., x_n, x\}, \max\{x_0, ..., x_n, x\}] \subset [a,b]$

oder mithilfe der div. Diff. zu den Stützstellen $\{(x_i, f(x_i))|_{i=0,...,n}\} \cup \{(x, f(x))\}$:

$$R_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

1. Sei $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+n)!}$, dann ist $f^{(n+1)}(x) \equiv 1$
   Mit $n = 3$ und $x_i = \frac{i}{3}$ für $i = 0,1,2,3$ ergibt sich:
   $$f(x) = \frac{x^4}{4!} \text{ und } R_3(x) = \frac{1}{4!}(x-0)(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{2}{3})(x-1).$$
2. Für $f(x) := \sin(x)$ und $n_i x_i$ wie oben ist $f^{(n+1)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin(x)$ d.h.
   $$R_3(x) = \frac{\sin(\xi_x)}{4!}(x-0)(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{2}{3})(x-1)$$
   mit $\min\{0,x\} \leq \xi_x \leq \max\{1,x\}$.
   Betrachte ein $x \in [-1,2]$, dann ergibt sich folgende grobe Abschätzung:
   $$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2 \approx 0.4630$$