Elektrodynamik

1 Mathematische Einführung

1.1. Partielle Abl'

Beispiel: $F = r \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(r) \\ A_y(r) \\ A_z(r) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial x}A_y + \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)$

1.1.2 Vektor, ops

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $grad(V) = \vec{\nabla} V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\vec{e}_i$, $div(\vec{v}) = \vec{\nabla}\vec{v} = \sum_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_i}$

Regeln: $\vec{\nabla}\vec{r} = 3$, $\vec{\nabla}(\vec{r}\times\vec{a}) = 0$, $\vec{\nabla}\times(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})) = \varphi(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{A}$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$, $\vec{\nabla}\times f(\vec{r})\vec{r} = 0$, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$\nabla\times(\vec{B}\times\vec{A}) = \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{A}) - (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{r}$

1.2 Delta-Fu': Dichte v. Pkt. Lad.

$\int_V d^3r\,\delta(r-r_0) = \begin{cases} 1, & r_0 \text{ in } V \\ 0, & r_0 \text{ n. in } V. \end{cases}$,

Lorentzkurve: $L_\eta(x-x_0) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+(x-x_0)^2}$

Fouriertransform.: $\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)}dk$

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$, $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i)$ (x_i: NS.)

$\int_\alpha^\beta \delta'(x-x_0)f(x)dx = f'(x_0)$, $\alpha < x_0 < \beta$

Karth: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$, $\int_V d^3r = \iiint dx\,dy\,dz$

Zyl: $x = \varrho\,\cancel{\sin(\varphi)}\cos(\varphi)$, $y = \varrho\sin(\varphi)$, $z = z$

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{\varrho_0}\delta(\varrho-\varrho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$ $\quad\int_V d^3r = \iiint \varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz$

Kugel: $x = \varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = \varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$, $z = \varrho\cos(\vartheta)$

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{\varrho_0^2\sin(\vartheta)}\delta(\varrho-\varrho_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$ $\quad\int_V d^3r = \iiint \varrho^2\sin(\vartheta)\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi$

1.3 Taylorentwicklung

$T^n_{x_0}f(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{d^if}{dx^i}\Big|_{x_0}(x-x_0)^i$, $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^n} = -n\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^{n-1}}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

1.4 Flächenintegrale

Volumen: $\iiint_V dx\,dy\,dz\, f(x,y,z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta V_i\, f(x_i,y_i,z_i)$

Linie: $\int_A^B d\vec{l}\,\vec{E}(x,y,z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\vec{l}\,\vec{E}(x_i,y_i,z_i)$

Fläche: $\int \ldots = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}(\vec{r})\Delta\vec{f}_i$ $(\vec{f} = f\cdot\vec{n})$, Beispiel: Quader: $\oint_{S(V)}\vec{E}d\vec{F} = A_i E_i = 0$

1.5 Integraldarst. d. Divergenz

$\vec{E} = const$ in $\Delta V \Leftrightarrow \dot{\vec{E}} = 0$, $\vec{\nabla}E$: Quelle, $\vec{\nabla}E$ max., wenn $\vec{E} \parallel d\vec{f}$

$\vec{E} = \vec{a}\varphi(\vec{r}) \Rightarrow \vec{\nabla}\varphi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)} d\vec{f}\varphi$

1.6 Integraldarst. d. Rotation

Zirkulation: $I_c = \oint_c \vec{A}(\vec{r})$, $I_c = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\vec{r}_i)\Delta\vec{r}_i$ „Wirbelstärke"

$I_c = F_{n,x_i}(\vec{\nabla}\vec{A})_{x_i}$ in $j \times k$-Ebene $\Rightarrow \vec{n}\vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{F_c\to 0}\frac{1}{F_c}\oint_c A(\vec{r})d\vec{r}$

1.7 Gauß-Satz

$\oint_{S(\Delta V)}\vec{E}d\vec{f} = \Delta V\vec{\nabla}E \Rightarrow \oint_{S(V)}\vec{E}d\vec{f} = \int_V d^3r\,\vec{\nabla}\vec{E}$

Greensche Identitäten: $\oint_{S(V)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}df = \int_V(\vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi + \varphi\Delta\psi)dV$

$\int_{S(V)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) = \int_V(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV$

1.8 Stokes-Satz

$\int_c \vec{A}d\vec{r} = \Delta F_i(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}_i))\vec{n} \Rightarrow \oint_{C(F)}\vec{A}d\vec{r} = \int_F\vec{\nabla}\times\vec{A}d\vec{f}$

1.9 Der Zerlegungssatz

$A(\vec r)=\vec A_l(\vec r)+\vec A_t(\vec r)$, $\vec\nabla\times\vec A_l=0$, $\vec\nabla A_t=0$

$\vec A_l(\vec r)=-\vec\nabla\alpha(\vec r)=-\vec\nabla\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\frac{\vec\nabla_{r'}\vec A(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$, α: Potential

$\vec A_t(\vec r)=\vec\nabla\times\beta(\vec r)=\vec\nabla\times\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\frac{\vec\nabla_{r'}\times\vec A(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$, β: Vektorpotential

$\vec\nabla\times\vec A=0\Leftrightarrow\vec A=-\vec\nabla\alpha$ (Wirbelfrei)

$\vec\nabla\vec A=0\Leftrightarrow\vec A=\vec\nabla\times\beta$ (Quellfrei)

2 Elektrostatik : Grundlagen

2.1 Coulomb-Gesetz

Superpositionsprinzip : Kräfte addieren sich vektoriell

$\vec K_{12}=k\frac{\vec r_1-\vec r_2}{|\vec r_1-\vec r_2|^3}q_1q_2=-\vec K_{21}$ (Kraft 2 auf 1) , $\vec K_1=kq_1\sum_{j=2}^{N}q_j\frac{\vec r_1-\vec r_j}{|\vec r_1-\vec r_j|^3}$

Efeld : Durch Ladungskont. ~~Ort~~ und Kraft def. (Testladung)

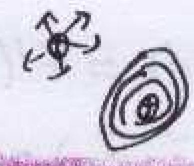
$\vec E(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}q_j\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3}$, $\vec E(\vec r)=-\vec\nabla\varphi(\vec r)$, $\varphi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$

$\vec\nabla\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec\nabla\vec E=0$ (konserv. Kraftfeld) , $\Delta\varphi=-\vec\nabla\vec E=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\oint_{S(V)}\vec E(\vec r)d\vec f=\int_V d^3r\,\vec\nabla\vec E(\vec r)=\frac{q(\vec r)}{\varepsilon_0}$, $\oint_C\vec E\,d\vec r=0$ (Maxwell)

2.2 Feldlinien & Äquipotentialflächen

Bahnen v. pos. Körper $\Rightarrow$ Feldlinien



Höhenlinien, $\varphi(\vec r)$ konst, $\vec E(\vec r)=-\vec\nabla\varphi$

2.3 Beispiel

1) N Punktlad.: $\rho(\vec r)=\sum_{j=1}q_i\delta(\vec r-\vec r_j)\Rightarrow\varphi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{|\vec r-\vec r_j|}$

2) Hom. Kugel : $\rho(\vec r)=\begin{cases}\rho_0 & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}\Rightarrow\varphi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{\rho}{|r-r'|}$

oder : $\oint_{S(V)}\vec E\,d\vec f=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho\,dV\Rightarrow$ LS: $\oint_{S(V)}\vec E\,d\vec f=\oint_{S(V)}E_r\,df=4\pi r^2E_r$

RS : $\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_r}\rho\,dV=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\frac{4\pi}{3}r^3 & r<R\\ Q & r>R\end{cases}\Rightarrow E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\rho_0\frac{4\pi}{3}r^3\\ Q\end{cases}$, $\frac{\rho 4\pi}{3}=Q$, $E_r(r)=-\frac{d\varphi(r)}{dr}$

$\Rightarrow\varphi(r)=-\int_\infty^r E_r(r')\,dr'$

2.4 Multipolentwicklung

$\varphi(\vec r)$ in Fernzone $T^3\varphi$: $\varphi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\frac{1}{r}\int_V d^3r'\rho(\vec r') & \text{Monopol } q\\ +\frac{1}{r^2}\left(\int_V d^3r'\rho(\vec r')\vec r'\right)\frac{\vec r}{r} & \text{Dipol}\\ +\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_ix_j}{r^2}\left(\int d^3r'\rho(\vec r')(3x_i'x_j'-r'\delta_{ij})\right) & \text{Quadrupol}\end{cases}$

$\vec p/Q_{ij}$ ← (..): Moment, Rest: Feld

Beispiel : $\rho=q\delta(\vec r-\vec a)-q\delta(\vec r)\Rightarrow\vec p=q\int_V d^3r'\,\vec r'(\delta(\vec r-\vec r')-\delta(\vec r))=q\vec a$

$\rho(\vec r)=\rho(-\vec r)\Leftrightarrow\vec p=0$, $\rho(\vec r)=-\rho(\vec r)\Rightarrow q=0$, $\rho(\vec r)=\rho(r)\Leftrightarrow Q_{ij}=0$

2.5 Elektrost. FeldE.

E. v. L.konv. = W für $\infty\to$ L.konv. : $W_{AB}=-\int_A^B\vec K\,d\vec l=-q\int_A^B\vec E\,d\vec l=q(\varphi(B)-\varphi(A))=qU$

$\Rightarrow W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3r\,|E(\vec r)|^2\Rightarrow w:=\frac{\varepsilon_0}{2}|E(\vec r)|^2$, $W=\int d^3r\,w(\vec r)$

2.6 Wechselwirkung Ladvert. außen

$\rho_{ext}\Rightarrow$ E-feld mit $\rho(\vec r)$: $\varphi_{ext}(\vec r)=\varphi_{ext}(0)+(\vec r\,\vec\nabla)\varphi_{ext}|_{r=0}+\dots+\varphi_{ext}(0)-\vec r\,\vec E_{ext}(0)$

$\Rightarrow W_1=q\varphi_{ext}(0)-\vec p\,\vec E_{ext}(0)$

Dipolfeld : $\varphi_D=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\vec r\vec p\Rightarrow\vec E_D(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec r\vec p)\vec r}{r^5}-\frac{\vec p}{r^3}\right)$

$W_1=W_{12}=W_{21}=-\vec p_2\vec E_D(\vec r_{12})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec p_1\vec p_2}{r_{12}^3}-\frac{3(\vec r_{12}\vec p_1)(\vec r_{21}\vec p_2)}{r_{12}^5}\right)$

2.7 El. Feldst. an Grenzflächen

Gauß: $\int_{\Delta V}d^3r\,\vec\nabla_r=\oint_{S(\Delta V)}d\vec f\,\vec E(\vec r)\xrightarrow{\Delta x\to 0}\Delta F\vec n_{12}(\vec E_2-\vec E_1)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Delta V}d^3r\,\rho(\vec r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta F\Rightarrow\vec n_{12}(\vec E_2-\vec E_1)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$

Stokes: $\vec\nabla\times\vec E=0\Leftrightarrow 0=\int_{\Delta F}d\vec f\,\vec\nabla\times\vec E=\oint_{S(\Delta V)}d\vec r\,\vec E=\vec t(\vec E_2-\vec E_1)=0$

Beispiel : a) xy-Ebene: $\sigma=\frac{Q}{F}>0$, $\vec E=E_z\vec e_z$, $E_{1z}=-E_{2z}\Rightarrow 2E_{2z}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_{2z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Rightarrow E(\vec r)=\frac{\sigma z\vec e_z}{2\varepsilon_0|z|}$

b) Plattenkond.: $\sigma(z=0)=\pm\frac{Q}{F}>0$, $\sigma(z=d)=-\frac{Q}{F}<0$ …

$\vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z-d}{|z-d|}\vec{e}_z$, $\vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_+ + E_- = \begin{cases}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e_z & 0<z<d \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z & 0<z<d \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d & z>d\end{cases}$, $U = \varphi(0) - \varphi(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{Q}{\varepsilon_0 F}d = \frac{Q}{C}$

$w = \frac{\varepsilon_0}{2}|E(\vec{r})|^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow W = \int d^3r\, w = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}Fd$

Zylinder: $\vec{E} = E\vec{e}_s$, $x = s\cos(\varphi)$, $y = s$, $z = z$, $\int d\vec{F}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases}0 & s<R_1 \\ Q & R_1<s<R_2 \\ 0 & s>R_2\end{cases}$

$E(s) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{s} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\begin{cases}c_1 \\ \ln(s) - c_2 \\ c_3 = 0\end{cases} \Rightarrow U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{Q}{C}$

$w = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 h}\begin{cases}\frac{1}{s^2}, & R_1<s<R_2 \\ 0, & \text{sonst}\end{cases} \Rightarrow W = \frac{1}{2}CU^2$

3 Randwertprobleme

3.1 Problem

Ohne RB: $\Delta\varphi = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Kugel: Feld innen $= 0 = E_a + E_i$ = äußeres Feld + Gegenfeld, $\varphi = \text{const}$

$E^n_{innen} = E^t_{innen} = 0 \Rightarrow E^t_{außen} = 0 \Rightarrow E^n_{außen} = E^n_{innen} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, σ: ind. Flächdichte

üblich: geg: φ in V oder $\frac{d\varphi}{dn} = -E_n \Rightarrow \varphi$ überall

RB: φ aus S (Dirichlet); $\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ auf S (v. Neumann); $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\varphi_0(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$

3.2 Greensfkt

Dirichlet: $\varphi = \text{const}$ auf $S(V)$, $G(\vec{r},\vec{r}')$: $\Delta_r G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$,

$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + f(\vec{r},\vec{r}')$, $\Delta f = 0$ $\Rightarrow$ 2. Greenscheld: $\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}',\vec{r})\rho(\vec{r}')$ $-\varepsilon_0\int d\vec{F}'\left(\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)$

RB: φ auf S $\Rightarrow f(r,r') \Rightarrow G(r,r') = 0$ ($r' \in S$)

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}') - \varepsilon_0\int_{S(V)} dF'\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}$, geerdet $\Rightarrow \varphi = 0$ auf Grenze

$= \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')$

G gesucht, $\cancel{\ldots}_{z'=0}$, $\Delta f = 0 \Rightarrow G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'+2z'\vec{e}_z|}\right)$

Bildladungen: fiktive Ladungen um Randbed. erfüllen (auf S(V))

Beispiel: Pktlad über ∞-Metallplatte: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{r}_0|}\right)$

$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z-z_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{(x,y,z+z_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, Infl. Ladichte: $\sigma: \frac{\partial q}{\partial n} = \varepsilon_0 E(x,y,z=0)$

gesamte infl. Lad: $\bar{q} = -q$ Bildkraft: Kr. auf q

Beispiel: Pktlad über geerd-Kugel: $\varphi_{Rand} = 0$, q_0 auf z-Achse, Symmetrie!

3.3 Entwicklung nach orth. Fkt'n

$\delta_{nm} = \int_a^b dx\, U_n^* U_m$ (orthonormal), $f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(x)$ (quadratintegrierbar)

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n U_n \Rightarrow f(x) = \int_a^b dy\, f(y)\delta(x-y) \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty U_n(x)U_n^*(y) = \delta(x-y)$

vollständig: $\lim_{N\to\infty}\int_a^b |f_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$ $\quad c_n = \int_a^b dx\, U_n^*(x) f(x)$

Beispiel: Fourier-Reihe: $I = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, $U_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$, $f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^\infty\left(A_n\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + B_n\sin(\ldots)\right)$

$A_l = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi l x}{a}\right)dx$, $B_l = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi l x}{a}\right)dx$

Beispiel: Fourier-Integral: $U_n = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{i\frac{2\pi n x}{a}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n=-\infty}^\infty A_n e^{i\frac{2\pi n x}{a}}$, $A_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\frac{2\pi n x}{a}} f(x)dx$, $k = \frac{2\pi n}{a}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk\, A(k)e^{ikx}$, $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x')e^{-ikx}dx$

3.4 Trennung der Variabeln

Gesucht φ in V, $\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(x,y) = 0$

Separationsansatz: $\varphi(x,y) = f(x)g(y) \Rightarrow g(y) = a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y}$, $f(x) = b_1\sin(\alpha x) + b_2\cos(\alpha x)$

$\varphi(0,y) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \Rightarrow b_2 = 0$, $\varphi(x,0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$

$\varphi(x_0,y) = 0 \Leftrightarrow b_1\sin(\alpha x) = 0 \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{x_0} \Rightarrow \varphi(x,y) = \sin(\alpha_n x)\sinh(\alpha_n y)$

Kugelkoord: $\Delta\varphi = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}\right)\phi$, $\Delta\phi = 0$

Separationsansatz: $\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R}{r}P(\vartheta)Q(\varphi) \Rightarrow Q = e^{im\varphi} \Rightarrow \frac{d^2R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$

$R = Ar^{l+1} + Br^{-l}$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1)\right)P(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + l(l+1)P = 0$

$P_l(x) = \frac{1}{l!}\frac{1}{2^l}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \Rightarrow l = 0: P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ (Legendre) (Azimuthalsymmetrie)

$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_k(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$, $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$

$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$

Beispiel: Pot. Kugel azimuthalsym. Flächenl.

$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sigma_l P_l(\cos\vartheta)$, $\sigma_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\,\sigma(\vartheta) P_l(\cos\vartheta)$

1) ϕ_i regulär b. $r=0$ ⇒ $B_l^i = 0$ ⇒ $\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) A_l^i r^l P_l(\cos\vartheta)$

2) $\phi_a \to 0$ für $r\to\infty$ ⇒ $A_l^a = 0$ ⇒ $\phi_a = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) B_l^a r^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta)$

3) stetig auf Rand ⇒ $\phi_i(R,\vartheta) = \phi_a(R,\vartheta)$ ⇒ $B_l^a = A_l^i R^{2l+1}$

4) E_n unstetig ⇒ $A_l^i = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0(2l+1)R^{l-1}}$

⇒ $\phi_a(r,\vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\vartheta)$

⇒ $\phi_i(r,\vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l} P_l(\cos\vartheta)$

Beispiel: geerd. Metallkugel in hom. el. E

$\vec E = E_0\vec e_z$, $\phi(R,\vartheta) = 0$ ⇒ $B_l^{a/i} R^{-(l+1)} = -A_l^{a/i} R^l$ ⇒ $B_l^{a/i} = -A_l^{a/i} R^{2l+1}$

$\phi_a(r,\vartheta) \xrightarrow{r\to\infty} -E_0 z = -E_0 r P_1(\cos\vartheta)$ ⇒ $A_1^a = -\frac{1}{3}E_0$ ⇒ $B = \frac{1}{3}E_0 R^3$

⇒ $\phi_a(r,\vartheta) = -E_0 R\left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\vartheta$ ⇒ $\sigma(\vartheta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\phi_a}{\partial r} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta$

3.5 Kugelflächenfkt.

$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$ ⇒ $Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$

⇒ $\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Azimuthal: unabh. v. φ.

4 Elektrostatik

4.1 Übersicht

Dielektrika: Molek. +/- durch el. Feld (Verschiebungspolarisation) [durch Feld]
Paraelektrika: Permanente Dipole (Orientierungspolarisation) [im Feld]
Ferroelektrika: Permanente Dipole unterh. T_c ⇒ Parar. [ohne Feld]

Versch.pol.: Kern fest, Elektr. harm. Osz. ⇒ $m_e\ddot{x}_i = -m\omega_0^2 x_i + qE_i$, $x_i(t) = x_{i0}\cos(\omega_0 t - \beta_i) + \frac{q}{m_e\omega_0^2}E_i$

$\langle\vec p\rangle = \frac{q^2}{m_e\omega_0^2}\vec E$ ⇒ $\vec p = \sum_{i=1}^{Z}\frac{q^2}{m_e\omega_0^2}\vec E = \varepsilon_0\alpha\vec E$

Orientpol.: N Dipole, p_i permanent ⇒ $\langle\vec p\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec p_i = \frac{p^2}{3kT}\vec E = \varepsilon_0\alpha\vec E$

4.2 El. Polarisation & dielektrische Versch.

$\varphi_p(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec p\,\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3}$ ⇒ $\vec P(\vec r) \hat{=} \sum_{p\in V}\vec p = \vec P(r')d^3r'$ el. Polarisation

$\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3} = \vec\nabla_{r'}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = -\vec\nabla_r\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$ ⇒ $\vec P(\vec r)\vec\nabla_{r'}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \vec\nabla_{r'}\frac{\vec P(\vec r)}{|\vec r-\vec r'|} - \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\vec\nabla_{r'}\vec P(\vec r)$

⇒ $\varphi_p(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\frac{-\nabla_{r'}\vec P(\vec r)}{|\vec r-\vec r'|}$ ⇒ $\vec\nabla\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r) - \vec\nabla\vec P(\vec r)$

Dielektrische Verschiebung: $\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P$, $\vec\nabla\vec D = \rho$ ⇒ fr. Ladungsdichte, freies E-Feld: $\vec E_a = \frac{\vec D}{\varepsilon_0}$

$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho(\vec r) + \rho_p(\vec r)\right)$, $\vec P = \varepsilon_0\chi_e\vec E$ ⇒ $\vec D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$

Symmetrie: $\vec E = E(z)\vec e_z$ ⇒ $D(z)\vec e_z$

1) $\vec\nabla\vec D = \rho$ ⇒ $\vec D = \begin{cases}\sigma\vec e_z & \text{in}\\ 0 & \text{aus}\end{cases}$ 2) $E = \begin{cases}D/\varepsilon_0 & \text{Vaak}\\ D/\varepsilon_0\varepsilon_r & \text{Med}\end{cases}$ 3) $P = \begin{cases}0 & \text{Vaak}\\ \vec D - \varepsilon_0\vec E = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma\vec e_z & \text{Med}\end{cases}$

⇒ $\sigma_p = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma$, $U = E_z d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d = \frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{F}$, $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{F}{d} = \varepsilon_r C_0$ Kapazität

4.3 Randwertprobleme und Dielektrika

$\vec\nabla D = \rho$ ⇒ $\vec n_{12}(\vec D_2 - \vec D_1) = \sigma$ (frei. Lad.) $\vec\nabla\times\vec E = 0$ ⇒ $E_{1t} = E_{2t}$

Falls $\sigma = 0$ aus ρ ⇒ $D_{1,n} = D_{2,n}$, $\vec D$ normalstetig ⇒ $E_{1,n} = \frac{\varepsilon_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(1)}}E_{2,n}$, $E_{1t} = E_{2t}$

⇒ $D_{1t} = \frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(2)}}D_{2t}$

4.3 Elektrostatische Energie

Vakuum: $W = \frac{1}{2}\int d^3r\,\rho(\vec r)\varphi(\vec r)$ (Dielekt. für Aufb. En $\frac{1}{2}$)

⇒ $\vec\nabla\vec D = \rho$ ⇒ $\vec\nabla\delta\vec D = \delta\rho$, $\phi\delta\rho = \phi\vec\nabla\delta\vec D = \vec\nabla(\varphi\delta D) - \nabla\varphi\,\delta D$

⇒ $\delta W = \int_V d^3r\,\vec E\delta\vec D + \int_{S(V)} d\vec f(\varphi\delta\vec D) \xrightarrow{V\to\infty} 0$

Isotropes Medium: $\vec E\delta\vec D = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec E\delta\vec E = \frac{1}{2}\delta(\vec E\vec D)$ ⇒ $\delta W = \int d^3r\,\delta(\vec E\vec D)$ ⇒

⇒ $\delta(W) = \delta\left(\frac{1}{2}\int d^3r\,\vec E\vec D\right)$ ⇒ $W = \frac{1}{2}\int d^3r\,\vec E\vec D$

5 Magnetostatik

5.1 Elektr. Strom

„gerad Bew. el. Lad" $\Delta Q = F\Delta z n q = F v \Delta t n q$, $I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = F n v q$

$j = \frac{I}{\Delta F}\vec{e}_v$, $d^3r = \Delta F dl = \Delta V \Rightarrow \vec{j}\, d^3r = I\, dl\, \vec{e}_i$

$j = \rho \cdot \vec{v}$, $I = \int_F \vec{j}\, d\vec{f} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, d^3r = -\int_{S(V)} \vec{j}\, d\vec{f} = -\int_V \vec{\nabla}\vec{j}\, d^3r$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{r},t) = 0$ Kontinuitätsgleichung

Magnetostatik: $\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$, $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $I = \frac{U}{R}$, $\vec{j} = \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$

σ: spezifische Leitfähigkeit „Materialgleichung"

$\vec{v}_i = \underset{\text{0.F.}}{\vec{v}_i(0)} + \underset{\text{beschl n.l.Stoß}}{\frac{q}{m}\vec{E}\, t_i} \Rightarrow \tau = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}\, t_i$ „mittlere Stoßzeit", $\bar{\vec{v}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i$ „mittlere Geschw."

$\Rightarrow \bar{\vec{v}} = \vec{v}(0) = -nev \Rightarrow \vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{e^2 n \tau}{m}\vec{E} = \sigma E \Rightarrow \sigma = \frac{e^2 n}{m}\tau$ Drude-Formel

$dW = q\vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \int_V d^3r\, E(\vec{r})\, j(\vec{r})$

5.2 Bio-Savart-Gesetz

Kraft v. 2 auf 1: $\vec{K}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2} d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

$\Rightarrow B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\, j(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

Beispiel: grader Leiter, Länge $\infty \Rightarrow$ Zylindersymmetrie

$\vec{r}' = z'\vec{e}_z \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, $r - r' = \rho\vec{e}_\rho + (z-z')\vec{e}_z$, $d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = \rho\, dz'\, \vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow B(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{4\pi}\rho\vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(\rho^2 + (z-z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho}\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{K} = \int d^3r\, (j(\vec{r}) \times B(\vec{r}))$ $\Rightarrow$ Pktlad $\vec{r}_0 \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$\Rightarrow \vec{K} = q v(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0)$ Lorentzkraft

5.3 Maxwellgl. & Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$, $A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ Vektorpotential

Quellfrei: $\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_{S(V)} B(\vec{r})\, d\vec{f}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \oint_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d\vec{f} = \oint_{S(C)} \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I$

$\vec{A}$ frei wählbar, sodass $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ Coulomb-Eichung $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$

5.4 Magnetostat. Moment

$\frac{1}{|r-r'|} = \underset{\text{Mono}}{\frac{1}{r}} + \underset{\text{Dipol}}{\frac{\vec{r}'\vec{r}}{r^3}} + \ldots \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int_V d^3r'\, j(\vec{r}')}_{0} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_V d^3r'\, (\vec{r}\vec{r}')\, j(\vec{r}') + \ldots = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + \ldots$

$\Rightarrow$ kein magn. Monopol, $\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\, (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$, $A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi} \Rightarrow \vec{B} \overset{!}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$

Beispiel: geschl. Stromkreis: $d^3r\, \vec{j}(\vec{r}) \to I\, d\vec{r} \Rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2}I \int(\vec{r}\times d\vec{r})\, \vec{r} \times d\vec{r} = |\vec{r}\times d\vec{r}|\, \vec{e}_z = IF\vec{e}_z$

Beispiel: N Pktlad: $j(\vec{r}) = q\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\, \delta(\vec{r}-\vec{R}_i(t)) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, (\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) = \frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{N}(R_i(t)\times v_i)\frac{M_0}{M_0}$

$(\vec{R}_i(t)\times\vec{v}_i(t))\, M_0 = \vec{L}_i$ Bahndrehimpuls $\Rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2M_0}\vec{L}$ gyromagn. Verh.