

1 Präsenzaufgabe 24.10.12

1.1 Aufgabe

Gegeben sei ein lin. GS. $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösbarkeit:

LGS ist eindeutig lösbar g.d.w. A nicht singular (det(A) ≠ 0)

Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung:

$$A^{(0)} := A, \quad b^{(0)} := b, \quad \text{Pivotelement } a_{2,1}^{(0)} = 2$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{2,1} = \frac{\tilde{a}_{2,1}^{(0)}}{\tilde{a}_{1,1}^{(0)}} = \frac{1}{2} : \quad 2. \text{ Zeile} - \frac{1}{2} \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$l_{3,1} = \frac{\tilde{a}_{3,1}^{(0)}}{\tilde{a}_{1,1}^{(0)}} = \frac{1}{2} : \quad 3. \text{ Zeile} - \frac{1}{2} \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Pivotelement } a_{3,2}^{(1)} = 7$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$l_{3,2} = \frac{\tilde{a}_{2,2}^{(1)}}{\tilde{a}_{3,2}^{(1)}} = -\frac{1}{7} : \quad 3. \text{ Zeile} + \frac{1}{7} \cdot 2. \text{ Zeile}$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution:

$$Rx = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = b^{(2)} \Rightarrow x = (5, -\frac{1}{2}, -4)^t$$

LR-Zerlegung:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PA$$

1.2 Aufgabe

Wieviele Operationen (Multiplikationen und Divisionen) sind für die Lösung des LGS

$Ax=b$ erforderlich, falls

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Letzte Zeile: 0 Ops.

Vorletzte Zeile: 1 Ops (Wert in letzter Spalte·Ergebnis aus letzter Zeile)

⋮

Erste Zeile: n-1 Ops

$$\Rightarrow N = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

Abschätzungen

$o(\cdot)$:

$g_k = o(f_k) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|g_k|}{|f_k|} = 0$ g wächst langsamer als f_k bzw. ist asymptotisch vernachlässigbar.

$O(\cdot)$, Landau-Symbol:

Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|g_k| \leq cf_k \forall k \in \mathbb{N}$, dann $g_k = O(f_k)$ für $k \rightarrow \infty$

1.3 Aufgabe

Satz von Cauchy Schwarz:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ist die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ mit euklidischer Norm $\|\cdot\|_2$ verträglich?

Zz.: $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{CS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F \|x\|_2 \end{aligned}$$

Beispiele der Matrix-Norm

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 5$$

Unendlichkeits-Norm:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 6$$

Summen-Norm:

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 6$$