1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 8 16.1.12

1.3 Aufgabe

a) Gegebene Stützpunkte:

$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = (1, 4), \quad (x_3, y_3) = (2, 3), \quad (x_4, y_4) = (4, 4)$

Wertepaare:

x_i	0	1	2	4
y_i	1	4	3	4

Berechnung der dividierten Differenzen in einem Dreiecksschema:

$$\begin{array}{ccccc}
x_i & f_i & f[x_i, x_{i+1} & & \\
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{4-1}{1-0} = 3 & & \\
1 & 4 & & \frac{-1-3}{2-0} = -2 & \\
 & & \frac{3-4}{2-1} = -1 & & \frac{\frac{1}{2}+2}{4-0} = \frac{5}{8} \\
2 & 3 & & \frac{\frac{1}{2}+1}{4-1} = \frac{1}{2} & \\
 & & \frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2} & & \\
4 & 4 & & &
\end{array}$$

Mit Hilfe der div. Differenzen können wir jetzt das Interpolationspolynom in Newtonscher Form:

$$\begin{aligned}
p(x) &:= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 1 + 3x - 2x(x-1) + \tfrac{5}{8}x(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

$p(5) = 1 + 15 - 40 + \frac{75}{2} = \frac{27}{2}$

b) $\tilde{p}(x) = p(x) + y(0, 1, 3, 4, 5)N_4(x)$

$\quad = -\frac{29}{240}x^4 + \frac{353}{240}x^3 - \frac{167}{30}x^2 + \frac{433}{60}x + 1$

1.4 Aufgabe

a) Sei p das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vonf zu den Stützstellen $x_0, ..., x_n$. Bilde zwei Newton-Darstellungen von p in der Reihenfolge $x_0, ..., x_n$ als auch $x_{i_0}, ..., x_{i_n}$:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_0, ..., x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f(x_{i_0}, ..., x_{i_k}) \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_{i_l})
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich des führenden Monoms:

$$x^n : \quad f(x_0, ..., x_i) = f(x_{i_0}, ..., x_{i_k})$$

b) Sei $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Sei $p \in \mathbb{P}_n$ das eind. best. Polym. wie oben.

Mit der Newton-Darstellung gilt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_0, ..., x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Da p eind. bestimmt ist und $f \in \mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ gilt notwendigerweise $p \equiv f$. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$O \cdot x^n = f(x_0, ..., x_n)x^n$$

c) Seien p_{n-1} Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0, ..., x_{n-1}$. Mit Satz 4.0.6 folgt:

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f(x_0, ..., x_{n-1}, x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

Andererseits gibt es wegen Satz 4.0.5 ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

$$\Rightarrow f(x_0, ..., x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

1.5 Aufgabe

Sei $f(x) = e^{\lambda x}$, dann gilt $f \in C^{n+1}([a, b])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.0.5 folgt:

$$R_n(x) :)f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

Mit $f^{(n+1)}(\xi_x) = \lambda^{n+1} e^{\lambda \xi_x}$.

Sei o.B.d.A, $\lambda > 0$, dann gilt:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \lambda^{n+1} e^{\lambda b} (b - a)^{n+1} = e^{\lambda b} \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}$$

wobei $d := (\lambda(b - a)$ bei beliebiger Lage der Stützstellen.

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{d^n}{n!} = 0$

(Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{d}{n+1} n \underset{\to}{\to} \infty 0$)

folgt die Behauptung.

Bemerkung

> **Satz 4.0.6**
>
> Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann hat der Interpolationsfehler die Darstellung:
>
> $$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f(x_0, ..., x_{n-1}, x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$
>
> mit p als Interpolationspolynom zu $x_0, ..., x_n$.

> **Satz 4.0.5**
>
> Sei f wie oben. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in [a, b]$ mit
>
> $$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$