

6.4 Die Quasi-stationäre Näherung: Gegen- und Selbstinduktion

Jetzt: relativ langsam veränderliche Felder („Quasi-stationär“)
wo $\dot{\vec{D}} \approx 0$ gesetzt werden kann.

$\dot{\vec{D}} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\vec{j} \approx 0} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$ (Magnetostatik) d.h. Stromstärke
ist an jeder Stelle des Drahtes gleich
(homogen), kann sich aber zeitl. ändern.

Allgemein:

$\rho(\vec{r}, t)$ ist zeitlich langsam veränderlich, wenn ρ sich
während der Zeit, die das Licht benötigt, um die Ausmaße
der Apparatur voranzukommen, sehr wenig verändert. In diesem
Fall können Retardierungseffekte (s. später) vernachlässigt werden.

① $\rho(\vec{r}, t) \approx \rho(\vec{r}, t + \frac{d}{c})$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}, \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{j}$

Betr. zunächst einfache Leiterschleife C

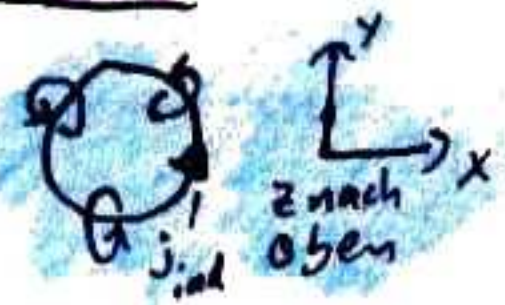
Faraday-Gesetz:

$\dot{\Phi}(t) = - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -U_{ind} = -I_{ind} R$

in Leiterschleife induzierte Spannung (Potentialdiff.)

U_{ind} ist so lange $\neq 0$, wie sich magn. Fluss durch Fläche $S(C)$ ändert
Das induzierte Feld ist so gerichtet, dass die Ursache seiner
Entstehung abgeschwächt wird. (Lenz'sche Regel)

Beispiel



$d\vec{f} \parallel \vec{e}_z$
 $d\vec{B} \uparrow \parallel \vec{e}_z$

induz. Magnetfeld von j_{ind} ; aus Tafel heraus
erzeugendes Magnetfeld in Tafel hinein

\vec{B}_{ind} ist entgegengerichtet zu $d\vec{B}$

Jetzt: wechselseitige Induktion vieler versch. Stromkreise
geschlossene Leiter, deren Umlaufsinn
durch Stromrichtung definiert ist.



$C_1, \dots, C_j, \dots, C_n$



\vec{F}_i : zugehöriger Flächenvektor
(\perp auf Fläche, $|\vec{F}_i| = \text{Fläche von } C_i$)

Ströme verursachen in F_j den magnetischen Fluss

$\Phi_j = \int_{F_j} d\vec{f} \cdot \vec{B}_{j, total}$, $\vec{B}_{j, total} = \sum_{m=1}^n \vec{B}_m = \sum_{m=1}^n \vec{\nabla} \times \vec{A}_m$

Quasistationäre Näherung $\hat{=}$ Magnetostatik.

$\Delta \vec{A}_m(\vec{r}, t) = \mu_r \mu_0 \vec{j}_m(\vec{r}, t)$ (Coulomb-Eichung)

$\Rightarrow \vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} I_m(t) \int_{C_m} d\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Also: $\Phi_j = \sum_{m=1}^n \int_{F_j} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}_m) \stackrel{!}{=} \sum_{m=1}^n \int_{C_j} d\vec{r} \cdot \vec{A}_m$ (Stokes)

$\stackrel{!}{=} \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n I_m(t) \int_{C_j} \int_{C_m} (d\vec{r} \cdot d\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{!}{=} \sum_{m=1}^n L_{jm} I_m(t)$

$L_{jm} = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{C_j} \int_{C_m} \frac{(d\vec{r} \cdot d\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

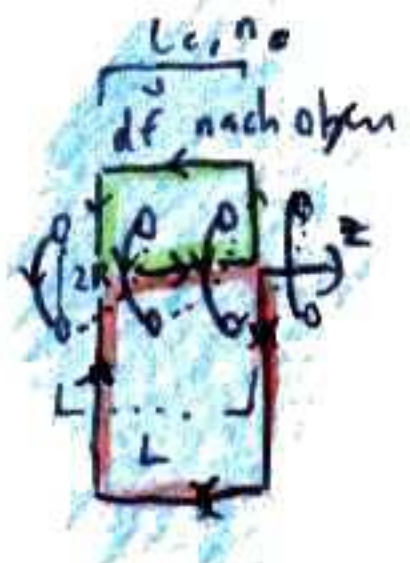
$L = \frac{\Phi}{I}$

$j=m$: L_{jj} Selbstinduktivität

$j \neq m$: L_{jm} Gegeninduktivität

$\Rightarrow U_{ind}^{(j)} = -\dot{\Phi}_j = -\sum_{m=1}^n L_{jm} \dot{I}_m(t)$

2 Anteile: a) $j=m$: Stromänd. im selben Leiter
b) $j \neq m$: " im anderen:



Beispiel: Selbstinduktivität einer langen Spule
 $L \gg R$: Randeffekte vernachlässigbar
 Zylindersymmetrie \Rightarrow Zylinderkoordin. sinnvoll (z, s, φ)
 Rotationsymmetrie $\Rightarrow \varphi$ egal
 Ansatz: $\vec{B} = \vec{B}(s, z) = B(s, z) \vec{e}_z$

Translationsinvarianz: $\vec{B} = B(s) \vec{e}_z$

Ampère Durchflutungsgesetz: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$; $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ | $\mu_0 \mu_r$

$\Rightarrow \oint_{\text{Scc}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{f} = \oint_{\text{Scc}} \vec{j}_{\text{frei}} \mu_0 \mu_r d\vec{f} = \mu_0 \mu_r I(S)$

$\Rightarrow \oint_C \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \mu_r I(S) = \mu_0 \mu_r n c l$ (unabh. von Lage der Kurve)

Da $B(\infty) = 0$ können wir damit annehmen, dass $\vec{B} = 0$ für $s > R$ ist.

$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \vec{e}_z & \text{für } s \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \oint_C \vec{B} d\vec{r} = \int_C B_0 \vec{e}_z d\vec{r} = L \cdot B_0 = \mu_0 \mu_r n c l$

$\Rightarrow B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{n c l}{L} = \mu_0 \mu_r \frac{N}{L} I$

$\Phi = B F = \mu_r \mu_0 \frac{N}{L} I F \Rightarrow$ induzierte Spann. $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\mu_r \mu_0 \frac{N^2}{L} F \dot{I}$

(L : Induktivität): $L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{L} F = -L \dot{I}$

6.5 Wechselströme

a) Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktivität

Betr.: n geschl. Leiter mit ohmschen Widerständen R_k , eingepreßte Spannungen (Generator) $U_k^{(e)}(t)$ und Induktionsflüssen Φ_k

Gesamtspannung im k -ten Leiter: $U_k = R_k I_k = U_k^{(e)}(t) + U_k^{\text{ind}} = U_k^{(e)}(t) - \sum_{m=1}^n L_{km} \dot{I}_m$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^n L_{km} \dot{I}_m(t) + R_k I_k(t) = U_k^{(e)}(t)$

1 Stromkreis:

$L \dot{I}(t) + R I(t) = U^{(e)}(t) = U_0 \cos(\omega t) = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t})$

Allg. Lösg: homog. Lösg. + spez. Lösg. Anfangsbed. \downarrow $-t \frac{R}{L}$

hom. Lösg: $U^{(e)}(t) = 0 \Rightarrow i + \frac{R}{L} I = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t \frac{R}{L}}$

spez. Lösg: $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \Rightarrow L \dot{I}(t) + R I(t) = U_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow I_0 (i\omega L e^{-i\varphi} + R e^{-i\varphi}) e^{i\omega t} = U_0 e^{i\omega t}$

$\Rightarrow I_0 e^{-i\varphi} = \frac{U_0}{R + i\omega L}$ (2 Gleichungen für I_0, φ)

Komplexer Widerstand:

$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi} = |Z| e^{i\varphi} = R + i\omega L$

Z : Impedanz
 R : Wirkwiderstand
 ωL : Blindwiderstand

$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

b) Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktivität und Kondensator

$U_k = R_k I_k = U_k^{(e)}(t) + U_k^{\text{ind}} - U_k^{\text{kond}}$ (U_k^{kond} : der eingepreßten Spannung entgegengerichtet)

1 Stromkreis:

$L \dot{I}(t) + R I(t) + \frac{Q}{C} = U_k^{(e)}(t)$

($\dot{Q}(t) = I(t)$) $\Rightarrow L \ddot{Q}(t) + R \dot{Q}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = U_k^{(e)}(t)$

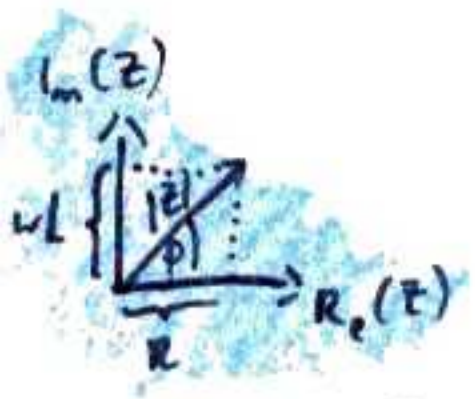
(Schwingkreis: $U_k^{(e)}(t) = U_0 \cos(\omega t)$)

Beispiel: Schaltvorgänge

Auf- und Abbau eines Gleichstroms im R-L-Kreis

a) $L \dot{I} + R I = \begin{cases} U^{(e)} & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}, I(t_0) = 0$

$t \geq t_0: I_{\text{hom}}(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}, I_{\text{spez}}(t) = \frac{U^{(e)}}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{U^{(e)}}{R} + A e^{-\frac{R}{L} t}$



$$I(t_0) = 0 = \frac{U^{(e)}}{R} + A e^{-\frac{R}{L} t_0} \Rightarrow A = -\frac{U^{(e)}}{R} e^{\frac{R}{L} t_0}$$

b) Schalter wird bei t_0 ausgeschaltet

$$I(t) = \frac{U^{(e)}}{R} \text{ für } t \leq t_0, \quad i(t) + \frac{R}{L} I(t) = 0 \quad (t > t_0)$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U^{(e)}}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \quad (t > t_0)$$

7 Elektromagnetische Wellen

7.1 Homogene Wellengleichungen

Ann: $\rho_{\text{frei}} = 0$; $j_{\text{frei}} = 0$; $\sigma = 0$; Lineares, homogenes Medium

Maxwell-Gln: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{u^2} \dot{\vec{E}}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{u^2} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} = -\frac{1}{u^2} \ddot{\vec{B}}$$

Also: $\Delta \vec{E} = \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{B}} \Rightarrow$ jede Komponente erfüllt Wellengl.:

$$\left(\Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \odot$$

7.2 Ebene Welle

Lösungsansatz: $\psi(\vec{r}, t) = f_-(\underbrace{\vec{k}\vec{r} - \omega t}_{\varphi_-}) + f_+(\underbrace{\vec{k}\vec{r} + \omega t}_{\varphi_+})$, φ_{\pm} Phasen

\vec{k} : fester Vektor, praktisch: Koord. sys so legen, dass z-Achse in \vec{k} -Richtung.

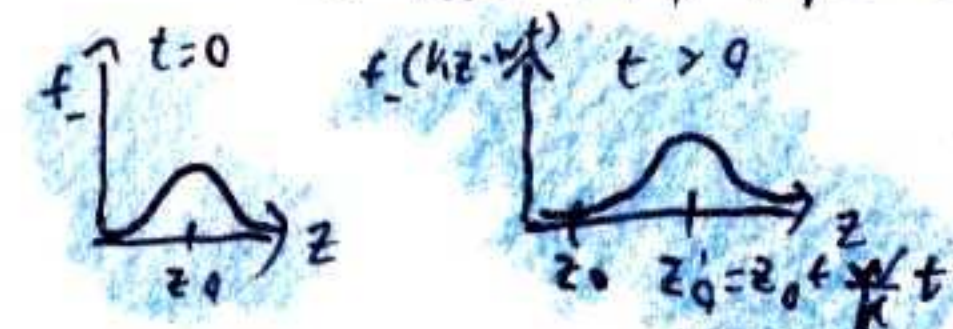
Dann: $\vec{k} = k \vec{e}_z \Rightarrow \psi = f_-(kz - \omega t) + f_+(kz + \omega t)$ (keine x/y-Abh. mehr!)

Einsetzen in \odot : $0 = \Delta \psi - \frac{1}{u^2} \ddot{\psi} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi - \frac{1}{u^2} \ddot{\psi} = k^2 \left(\frac{d^2 f_-}{d\varphi_-^2} + \frac{d^2 f_+}{d\varphi_+^2} \right) - \frac{\omega^2}{u^2} \left(\frac{d^2 f_-}{d\varphi_-^2} + \frac{d^2 f_+}{d\varphi_+^2} \right)$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{u^2} \Rightarrow \boxed{\omega = uk}$$

Interpretation: DGL 2. Ordnung mit $\psi(\vec{r}, 0), \dot{\psi}(\vec{r}, 0)$

$\Rightarrow f_-(kz), f_+(kz)$ entsprechend wählen

Betr: f_- :  $t=0$: vorgegeben, f_- hat Max bei z_0 (k fest)
 $t>0$: $f_-(kz - \omega t)$ hat Max bei $kz_0 - \omega t = kz_0' \Rightarrow z_0' = z_0 + \frac{\omega}{k} t$

\Rightarrow Alle Pkte bewegen sich mit Phasengeschwindigkeit $\frac{dz}{dt} = u = \frac{\omega}{k}$ nach rechts, unabh. von x, y (f_-) (links) (f_+)

Speziell: $f_-(\vec{r}, t) = f_-(x, y, z, t) = A e^{i(kz - \omega t)}$
 $f_+(\vec{r}, t) = f_+(x, y, z, t) = B e^{i(kz + \omega t)}$ } Ebene Wellen

Eigenschaften:

a) für festes t_0 räuml. period. in z : $e^{i(kz - \omega t_0)} = e^{i(kz + 2\pi n \omega t_0)}$
 $= e^{i(k(z + \frac{2\pi n \omega t_0}{k}) - \omega t_0)}$
 λ : Wellenlänge

b) für festes z_0 zeitl. period. in t : $e^{i(kz_0 - \omega t)} = e^{i(kz_0 + 2\pi n - \omega t)}$
 $= e^{i(kz_0 - \omega(t + \frac{2\pi n}{\omega}))}$
Zeitl. Periode: τ

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \vec{k} = k \vec{e}_z \text{ (Wellenvektor)}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{1}{\tau} \text{ (Frequenz)}, \quad \omega = 2\pi \nu \text{ (Kreisfrequenz)}$$

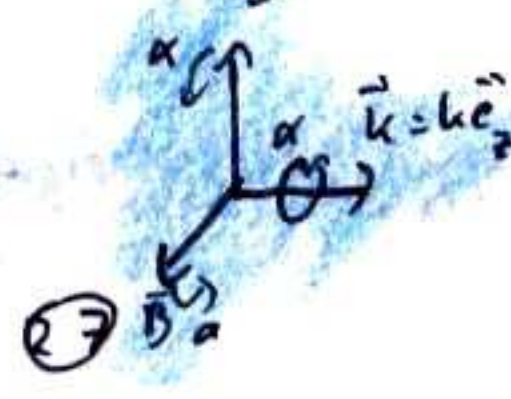
Allg. Ansatz zur Lösung der elektrodynamischen Wellengl. für \vec{E}, \vec{B}

transversale Welle
 $\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = B_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad E_0, B_0 \text{ komplex!}$

später: Realteil nehmen!

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 \varphi(\vec{r}) = (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A}_0, \quad \vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}} = i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow i(\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
 gilt $\forall \vec{r}, t \Rightarrow \vec{k} = \vec{k}', \omega = \omega'$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{u^2} \dot{\vec{E}} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{u^2} \vec{E}_0$



① $\Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$, ② $\Rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{k}$, ③ $\Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k} \perp \vec{B}_0$
 Ansatz: $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y$, $\vec{B}_0 = B_{0x} \vec{e}_x + B_{0y} \vec{e}_y$
 ③ $\Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = \omega \vec{e}_z \times (B_{0x} \vec{e}_x + B_{0y} \vec{e}_y) = \omega B_{0x} \vec{e}_y - \omega B_{0y} \vec{e}_x = -\frac{\omega^2}{u^2} (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y)$

Also: $\vec{E} = (E_{0y} \vec{e}_x + E_{0x} \vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$
 $\vec{B} = \frac{1}{u} (-E_{0y} \vec{e}_x + E_{0x} \vec{e}_y) e^{i(\dots)}$

E_{0x}, E_{0y} komplex $\Rightarrow |E_{0x}| e^{i\varphi} = E_{0x}$, $|E_{0y}| e^{i(\varphi + \delta)} = E_{0y}$

$\Rightarrow \vec{E} = (|E_{0x}| \vec{e}_x + |E_{0y}| e^{i\delta} \vec{e}_y) (\cos(kz - \omega t + \varphi) + i \sin(\dots))$

$\Rightarrow E_x = \text{Re}(\vec{E})_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi)$, $E_y = \text{Re}(\vec{E})_y = |E_{0y}| (\cos(\dots) \cos(\delta) - \sin(\dots) \sin(\delta))$

Diskussion:

1) $\delta = 0 \Rightarrow \sin(\delta) = 0 \Rightarrow \text{Re}(\vec{E}) = (|E_{0x}| \vec{e}_x + |E_{0y}| \vec{e}_y) \cos(kz - \omega t + \varphi)$

$\delta = \pm \pi \Rightarrow \sin(\delta) = 0, \cos(\delta) = -1 \Rightarrow \text{Re}(\vec{E}) = (" - ")$

$\Rightarrow \vec{E}$ schwingt in einer festen Richtung relativ zur Ausbreitungsrichtung
 feste Richtung \Rightarrow lineare Polarisation

α : Polarisationswinkel gegenüber festem Koordinatensystem

2) $\delta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\delta) = 0, \sin(\delta) = \pm 1 \Rightarrow E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi)$, $E_y = \mp |E_{0y}| \sin(\dots)$

$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1$ Ellipse mit Halbachsen $|E_{0x}|, |E_{0y}|$
 (zirkuläre Polarisation)

2 Möglichkeiten:

- a) Linksdrehend in Ausbreitungsrichtung
- b) Rechtsdrehend "

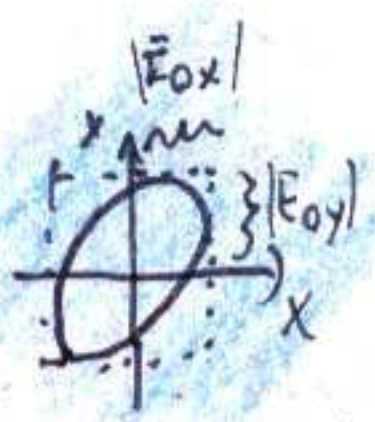
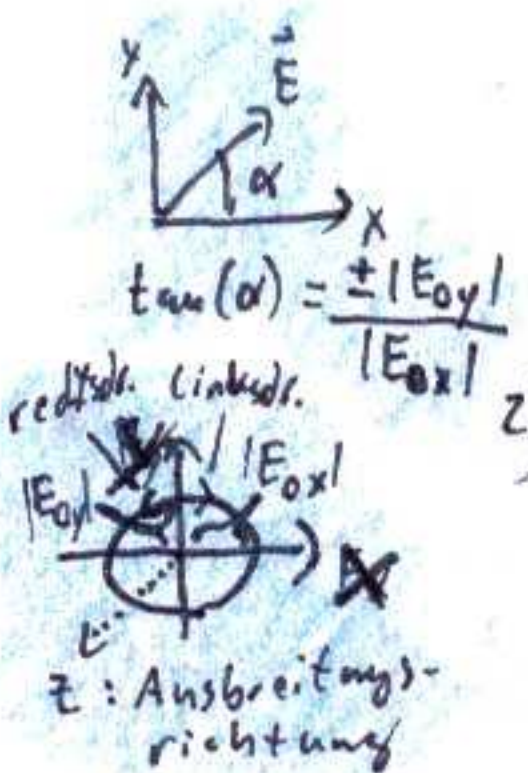
Drehrichtung: $\delta = \frac{\pi}{2}, (kz - \omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow E_y = 0$

$t > t_0 \Rightarrow \sin(kz - \omega t + \varphi) < 0 \Rightarrow E_y > 0 \Rightarrow$ rechtsdrehend

$\delta = -\frac{\pi}{2}$: Linksdrehend

δ allgemein: $\neq 0, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow verdrehte Ellipsen



7.3 Wellenpakete

$f_{\pm}(kz - \omega t)$ löst Wellengl., k gegeben $\Rightarrow \omega = ku \Rightarrow$ für jedes k bestimmte Lösung

\Rightarrow überlagerung: $\sum_k a_k f_{\pm}(kz - \omega t)$ auch Lösung, auch $\int_{-\infty}^{\infty} a(k) f_{\pm}(kz - \omega t) dk$

Auch gewichtete Überlagerung in Wellen $H_{\pm}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk b(k) e^{i(kz \pm \omega t)}$

In Praxis sind Wellen nicht streng monochromatisch (fester k/ω -Wert), sondern sind mehr oder weniger scharfe Frequenzbündel.

Um das zu beschreiben, wählt man $b(k)$ als Funktion, die um k_0 zentriert ist,

z.B. $b(k) = \frac{1}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-4(k-k_0)^2 / (\Delta k_0)^2}$ (Gauß-Kurve)

Einschub zur Dispersionsrelation

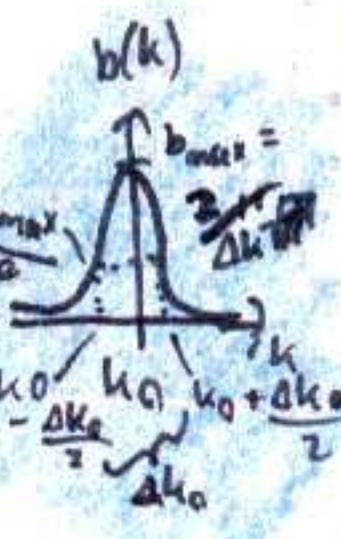
$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \rho_0}} = \frac{\omega}{k}$ bleibt natürlich bestehen

allg.: $\epsilon_r(\omega)$ (später: näher untersuchen, Modell: Thomson)

$\Rightarrow u(\omega) \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$ nicht streng linear in k (Zusatzterme treten auf)

Annahme: $\Delta k_0 \ll k \Rightarrow$ Entwicklung von $\omega(k)$ und $\omega_0 = \omega(k_0)$

$\Rightarrow \omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} + \dots \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0}$ Gruppeneschwindigkeit



$$H_{\pm}(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq b(k_0 + q) e^{iq(z \pm v_g t)}$$

$$= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4q^2}{(\Delta k_0)^2} - iq(z \pm v_g t)} dq e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

quadratische Ergänzung $\Rightarrow -[\dots] = -\frac{4}{(\Delta k_0)^2} [q^2 - 2i \underbrace{\frac{(z \pm v_g t) \Delta k_0}{8}}_{=: B} q]$

$$= -\frac{4}{(\Delta k_0)^2} (q^2 - 2Bq + B^2 - B) = -\frac{4}{(\Delta k_0)^2} ((q-B)^2 - B^2)$$

$$= -\frac{4}{(\Delta k_0)^2} (q-B)^2 + \frac{4}{(\Delta k_0)^2} \frac{(z \pm v_g t)^2 (\Delta k_0)^4}{64}$$

Gesucht: $\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\frac{4}{(\Delta k_0)^2} (q-B)^2}$, $y = (q-B) \frac{z}{(\Delta k_0)^2} \Rightarrow dy = dq \cdot \frac{z}{\Delta k_0}$

$$\Rightarrow H_{\pm}(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} e^{-\frac{y}{(\Delta k_0)^2} (z \pm v_g t)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} e^{-\frac{(\Delta k_0)^2}{16} (z \pm v_g t)^2}$$

$$\Rightarrow 1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{s^2}} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} ds s e^{-s^2} = \pi \Rightarrow 1 = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{H_{\pm}(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \cdot e^{-\frac{(\Delta k_0)^2}{16} (z \pm v_g t)^2}}$$

ebene Welle Amplitude der Welle: Gauß-Glocke

Gauß-Glocke bewegt sich mit Geschw. v_g im pos/neg. Richtung; Signal: v_g , Signalgeschwindigkeit

Breite des Wellenpakets: Max d. WP. liegt bei $z_0 = \mp v_g t$

Für $z = z_0 + \frac{\Delta z}{2}$ hat WP Wert $\frac{1}{e}$. Δz : Breite d. WP.

$$\Rightarrow e^{-\frac{(\Delta k_0)^2}{16} \cdot \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2} = e^{-1} \Rightarrow \Delta z = \frac{8}{\Delta k_0} \text{ (Breite unabh. v. } t)$$

$\Delta z \cdot \Delta k_0 = \text{const} = 8$ Unschärferelation, $\Delta k_0 \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow \infty$

(monochromatisch \rightarrow Wellen ausgedehnt)

$\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta k_0 \rightarrow \infty$ (räumlich lokalisiert \rightarrow Wellenvektoren kommen vor)

Gilt nur für $w(k) = \omega_0 + (k-k_0) \frac{dw}{dk}$

Falls Zusatzterm $\beta(k-k_0)^2$ auftritt \Rightarrow WP zerfließt wachsende Zeit

7.4 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Gesucht: Lösg d. linearen Wellengl.: $(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi(\vec{r}, t) = 0$

für Anfangsbedingungen der Form: $\psi(\vec{r}, t=0) = \psi_0(\vec{r})$
 $\dot{\psi}(\vec{r}, t=0) = v_0(\vec{r})$ } vorgegeben!

Zu Lösung benötigen wir die Fouriertransformierte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx}, \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

mit δ -Funktion: $\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(k-k')}$

3-d-Fouriertransformierte entsprechend:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z A(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int d^3k A(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$A(\vec{k}) = A(k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} dx dy dz f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int d^3r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\delta(\vec{k}-\vec{k}') = \delta(k_x-k_x') \delta(k_y-k_y') \delta(k_z-k_z') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}$$

Lösungsansatz:

$$\psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \iiint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \text{ (4-Fach-Fourier-Transf.)}$$

$$\nabla^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} = i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \Delta e^{i\vec{k}\vec{r}} = -k^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}) \tilde{\psi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0 (*) \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (1 - k^2 + \frac{\omega^2}{u^2}) \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega-\omega')t} \right]$$

$$\Rightarrow \left(k'^2 + \frac{\omega'^2}{u^2} \right) \tilde{\Psi}(\vec{k}', \omega') = 0 \quad (\omega' \rightarrow \omega, \vec{k}' \rightarrow \vec{k})$$

algebraische Gleichung für Fouriertransformierte

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \pm uk} \quad \text{dort } \tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) \equiv \tilde{\Psi}(\vec{k}, \pm uk) \neq 0$$

Ansatz z: $\tilde{\Psi}(\vec{k}, \omega) = \underbrace{\tilde{\Psi}(\vec{k}, -uk)}_{=: a_+(\vec{k})} \delta(\omega + uk) + \underbrace{\tilde{\Psi}(\vec{k}, uk)}_{=: a_-(\vec{k})} \delta(\omega - uk) \quad (**)$

Gesucht: $a_+(\vec{k}), a_-(\vec{k})$

•• in • $\Rightarrow \Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k (a_+(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} + kut)} + a_-(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - kut)})$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}, 0) = \Psi_0(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\vec{r}} (a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k}))$$

$\sqrt{2\pi} \cdot \text{FT von } \Psi_0(\vec{r})$

$$\dot{\Psi}(\vec{r}, 0) = v_0(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\vec{r}} iku (a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k}))$$

$\sqrt{2\pi} \cdot \text{FT von } v_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k})) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{i\vec{k}\vec{r}} \Psi_0(\vec{r}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} = \frac{1}{2\pi} \int d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} \Psi_0(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k})) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} v_0(\vec{r}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} = \frac{1}{i k u} \frac{1}{2\pi} \int d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} v_0(\vec{r})$$

$\Rightarrow a_+(\vec{k}), a_-(\vec{k})$ bekannt

$$\Rightarrow a_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} (\Psi_0(\vec{r}) \mp \frac{1}{ku} v_0(\vec{r}))$$

Also:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' e^{i(k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z'))} \cdot [e^{ikut} (\Psi_0(x', y', z') - \frac{1}{ku} v_0(x', y', z')) + e^{-ikut} (\Psi_0(x', y', z') + \frac{1}{ku} v_0(x', y', z'))]$$

Def: $D(\vec{r}, t) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{(e^{ikut} - e^{-ikut})}{ku}$

Beh.: $\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' [D(\vec{r}-\vec{r}', t) \Psi_0(\vec{r}') + D(\vec{r}-\vec{r}', t) v_0(\vec{r}')]]$

$$\Rightarrow D(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi u r} [\delta(r+ut) - \delta(r-ut)]$$

7.5 Energietransport in Wellenfeldern

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t)] = w_m + w_e$$

$$\vec{s}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \text{Da in RS Produkte d. Felder auftreten}$$

\Rightarrow in Gleichungen von vorneherein mit Realteil rechnen!

\vec{a}, \vec{b} : kplx. Größen (Vektoren)

$$(\text{Re}(\vec{a}))(\text{Re}(\vec{b})) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{a}^*) \cdot \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{b}^*) = \frac{1}{4} (\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b}^* + \vec{a}^*\vec{b} + \vec{a}^*\vec{b}^*)$$

Hier: $\vec{a}(\vec{r}, t) = \vec{a}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{b}(\vec{r}, t) = \vec{b}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

Jetzt: Nicht an $w(\vec{r}, t)$ direkt interessiert, sondern an Zeitmittel:

$$\bar{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} w(\vec{r}, t') dt', \quad \tau: \text{Periode}, \quad \tau\omega = 2\pi$$

$$\Rightarrow \overline{\vec{a}\vec{b}}(t) = \frac{1}{\tau} \vec{a}_0 \vec{b}_0 \int_t^{t+\tau} e^{-2i\omega t'} dt' = 0$$

aber: $\overline{\vec{a}^*\vec{b}}(t) = \frac{1}{\tau} \vec{a}_0^* \vec{b}_0 \int_t^{t+\tau} 1 dt' = \vec{a}_0^* \vec{b}_0, \quad \overline{\vec{a}\vec{b}^*}(t) = \vec{a}_0 \vec{b}_0^*$

$$\Rightarrow \overline{\text{Re}(\vec{a})\text{Re}(\vec{b})}(t) = \frac{1}{4} (\vec{a}_0^* \vec{b}_0 + \vec{a}_0 \vec{b}_0^*), \quad \vec{a}_0^* = \vec{a}_0^* - i \vec{a}_{z0} \quad \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a}_0^* \vec{b}_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a}_0 \vec{b}_0^*)$$

Analog gilt:

$$\operatorname{Re}(\vec{a}) \operatorname{Re}(\vec{b}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a} \times \vec{b}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a}^* \times \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\vec{H}_0 \vec{B}_0^* + \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^*) \quad , \quad \vec{s}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)$$

gilt für beliebige \vec{r} -Abhängigkeiten

Jetzt: ebene Wellen: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
 $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0$

Wir wissen:

$$a) \omega \vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_0, \vec{B}_0$$

$$\Rightarrow |\vec{B}_0|^2 = \frac{k^2}{\omega^2} |\vec{E}_0|^2 = u^2 |\vec{E}_0|^2$$

$$b) \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{u^2} \vec{E}_0$$

$$\vec{w}(\vec{r}, t) : \vec{H}_0 = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B}_0 \quad , \quad \vec{w}_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_r \mu_0} |\vec{B}_0|^2 = \frac{1}{4} \epsilon_r \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2$$

$$\vec{w}_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \epsilon_r \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \doteq \vec{w}_m(\vec{r}, t)$$

$$\vec{s}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\mu_r \mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*) = \frac{1}{2\mu_r \mu_0} \frac{1}{\omega} \operatorname{Re}(\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^*)) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} |\vec{E}_0|^2 \frac{\vec{k}}{k}$$

$$= u \vec{w}(\vec{r}, t) \frac{\vec{k}}{k}$$

8 Wellen in elektr. Leitern und Dielektrika

Früher: ϵ_r, ν , konstant und reell, $\sigma \equiv 0$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}$$

Entkopplung des Gl.-Systems: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\dot{\vec{j}} - \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_r \mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} - \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \mu_r \sigma (\vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}}) + \frac{1}{u^2} \vec{\nabla} \times \ddot{\vec{E}}$$

$$-\Delta \vec{B} = -\mu_0 \mu_r \sigma \dot{\vec{B}} + \frac{1}{u^2} \ddot{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) \end{Bmatrix} = 0$$

Telegraphengleichung

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \left[\Delta + \frac{\omega^2}{u^2} + i\omega \mu_r \mu_0 \sigma \right] \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \hat{u}^2 = \frac{1}{u^2} + \frac{i\mu_r \mu_0 \sigma}{\omega}$$

Bedeutung von \hat{u} : $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \Rightarrow \frac{1}{\hat{u}^2} = \frac{1}{c^2} \mu_r \epsilon_r \Rightarrow \frac{1}{\hat{u}^2} = \frac{1}{c^2} \mu_r \epsilon_r$

Im nächsten Abschnitt: Dielektrika (H_2O):

ϵ_r komplex (Lorentz-Modell)

komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\frac{1}{\hat{u}^2} = \frac{1}{c^2} \mu_r \hat{\epsilon}_r(\omega) \Rightarrow (\Delta + \frac{\omega^2}{\hat{u}^2}) \vec{E}_0(\vec{r}) = 0$$

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)$$

Annahme: $\epsilon_r'(\omega), \epsilon_r''(\omega)$ bekannt!

8.1 Telegraphengleichung

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{\hat{u}^2}) \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \frac{1}{\hat{u}^2} = \frac{1}{u^2} + i \frac{\mu_r \mu_0 \sigma}{\omega} = \frac{1}{R^2} \mu_r \hat{\epsilon}_r \quad (\text{kpl. Dielektriz.konst.})$$

$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)$ als bekannt vorausgesetzt.

Ansatz: $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \hat{k}^2 = \frac{\omega^2}{\hat{u}^2} \Rightarrow \hat{k} = \frac{\omega}{\hat{u}} \leftarrow \text{komplex!}$

$$\frac{1}{\hat{u}} = \frac{1}{c} \sqrt{\mu_r \hat{\epsilon}_r} = \frac{\hat{n}}{c} = \frac{1}{c} (\bar{n} + i\gamma)$$

Betrachte Welle in x-Richtung!

$$\hat{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n} \vec{e}_x = \frac{\omega}{c} (\bar{n} + i\gamma) \vec{e}_x \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\frac{\omega}{c} \bar{n} x - \omega t)} e^{-\frac{\omega}{c} \gamma x} \quad , \quad \frac{\omega}{c} \bar{n} = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad , \quad e^{-\frac{\omega}{c} \gamma x} = e^{-\frac{x}{\delta}}$$

δ : Eindringtiefe

(Kupfer: $\delta = 10^{-4}$ cm)
(quantitative Diskussion später!)

wechselfeld \Rightarrow Feld kann nur in Haut des Drahtes eindringen
 \Rightarrow Wechselstrom fließt nur in Haut (skin-Effekt)

$\vec{E} = \text{ok}, \vec{B}?$

$\vec{k} = \hat{k} \vec{e}_z$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \hat{k} \vec{e}_z \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \hat{k} \perp \vec{E}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{e}_z \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$, $\vec{v} \times \vec{E} = \vec{B} \Rightarrow i \hat{k} \vec{e}_z \times \vec{E} = i \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$
 $\Rightarrow \hat{k}, \vec{E}$ und \vec{B} bilden orthogonales Dreibein wie vorher, aber \vec{E} und \vec{B} sind nicht gleichphasig.

$\Rightarrow \omega \vec{B} = \frac{1}{c} (\bar{n} + iy) (\vec{e}_z \times \vec{E})$, $(\bar{n} + iy) = \sqrt{\bar{n}^2 + y^2} e^{i\varphi}$
Alle anderen Überlegungen (Polarisation etc.) unverändert!

Es fehlt noch: Best. von $\hat{n} = \bar{n} + iy$ aus $\hat{\epsilon}_r$

$\frac{1}{\hat{n}^2} = \frac{1}{c^2} \mu_r \hat{\epsilon}_r = \frac{\hat{n}^2}{c^2}$, $\hat{n}^2 = (\bar{n} + iy)^2 = \bar{n}^2 - y^2 + 2iy\bar{n} = \mu_r (\epsilon_r' + i\epsilon_r'')$

$\Rightarrow \boxed{\bar{n}^2 - y^2 = \mu_r \epsilon_r', 2y\bar{n} = \mu_r \epsilon_r''} \Rightarrow y = \frac{\mu_r \epsilon_r''}{2\bar{n}}$

$\Rightarrow \bar{n}^2 - \frac{\mu_r^2 \epsilon_r''^2}{4\bar{n}^2} - \mu_r \epsilon_r' = 0 \Rightarrow \bar{n}^4 - \mu_r \epsilon_r' \bar{n}^2 - \frac{\mu_r^2 \epsilon_r''^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \bar{n}^2 = \frac{\mu_r \epsilon_r'}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\mu_r \epsilon_r'')^2}{\mu_r^2 \epsilon_r'^2}} \right) \geq 0$, da \bar{n} reell

$y^2 = \bar{n}^2 - \mu_r \epsilon_r' = -\frac{\mu_r \epsilon_r'}{2} + \frac{\mu_r \epsilon_r'}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2}$

Falls $\epsilon_r'' \ll \epsilon_r'$: $\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2 \Rightarrow \bar{n}^2 \approx \mu_r \epsilon_r' + \frac{1}{2} \mu_r \epsilon_r' \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2$
 $\Rightarrow y^2 \approx \frac{1}{2} \mu_r \epsilon_r' \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2$

Gesucht: $\hat{\epsilon}_r(\omega), \hat{\mu}_r(\omega)$

8.2 Dispersion und Absorption

a) Thomson'sches Atommodell \Rightarrow Lorentzmodell, Drude-Modell

e^- gekoppelt an Atomrumpf, rücktreibende Kraft, sonst freies e^- äußeres \vec{E} -Feld. (Reibung \in Dissipation)

$\ddot{x}_i + \gamma_0 \dot{x}_i + \omega_0^2 x_i = -\frac{e}{m} E_i$ ($i=1,2,3 \in x,y,z$), $E_i = E_{0i}(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{r}}$

$x_i = x_i(\omega) e^{-i\omega t} \Rightarrow x_i(\omega) [-\omega^2 - i\gamma_0 + \omega_0^2] = -\frac{e}{m} E_{0i}(\omega)$

$P_i(\omega) = -ex_i(\omega)$ atomares Dipolmoment in i -Richtung

$\Rightarrow P_i(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_0 \omega} E_{0i}(\omega)$

Dielektrische Polarisation: $\vec{P}(\omega) = \frac{N}{V} \vec{P}(\omega) = n_V \epsilon_0 \hat{\alpha}(\omega) \vec{E}_0(\omega) = \epsilon_0 \chi_E(\omega) \vec{E}$
dielekt. Suszeptibilität

Also: $\hat{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \chi_E(\omega) = 1 + n_V (\alpha' + i\alpha'')$

Diskussion von $\hat{\alpha}(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$, $n_V \hat{\alpha}(\omega) = n_V \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_0 \omega} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0 \omega}$
 ω_p^2 : Plasmafrequenz

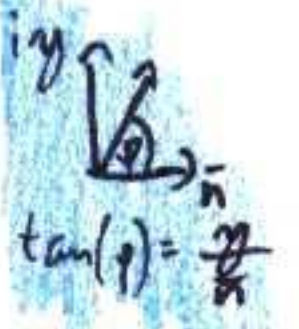
Nähe: Frequenzbreite der Ordnung $O(\gamma_0)$

Jetzt: große Frequenz $\omega \gg \omega_0, \omega_p$ ($\omega_0 \gg \gamma_0$)

$n \hat{\alpha}(\omega) = \omega_p^2 \frac{\omega^2}{\omega^4} \left\{ \frac{-1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^2 + \frac{\gamma_0^2}{\omega^2}} + i \frac{\gamma_0/\omega}{\dots} \right\} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ reell $\Rightarrow \hat{\epsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ reell!

Oszillatorstärken Erweiterung des Modells: e^- schwingen mit mehreren Frequenzen $\omega_k, k=1, \dots, K$

n_k : Dichte derjenigen i , die mit Frequenz ω_k schwingen
 $\sum_{k=1}^K n_k f_k = n_V \Rightarrow \sum_{k=1}^K f_k = 1 \Rightarrow \hat{\epsilon} = 1 + n_V \sum_{k=1}^K f_k (\alpha_k' + i\alpha_k'')$



$\hat{\alpha}(\omega)$ nur $\neq 0$ in Nähe der Resonanzfrequenz ω_0

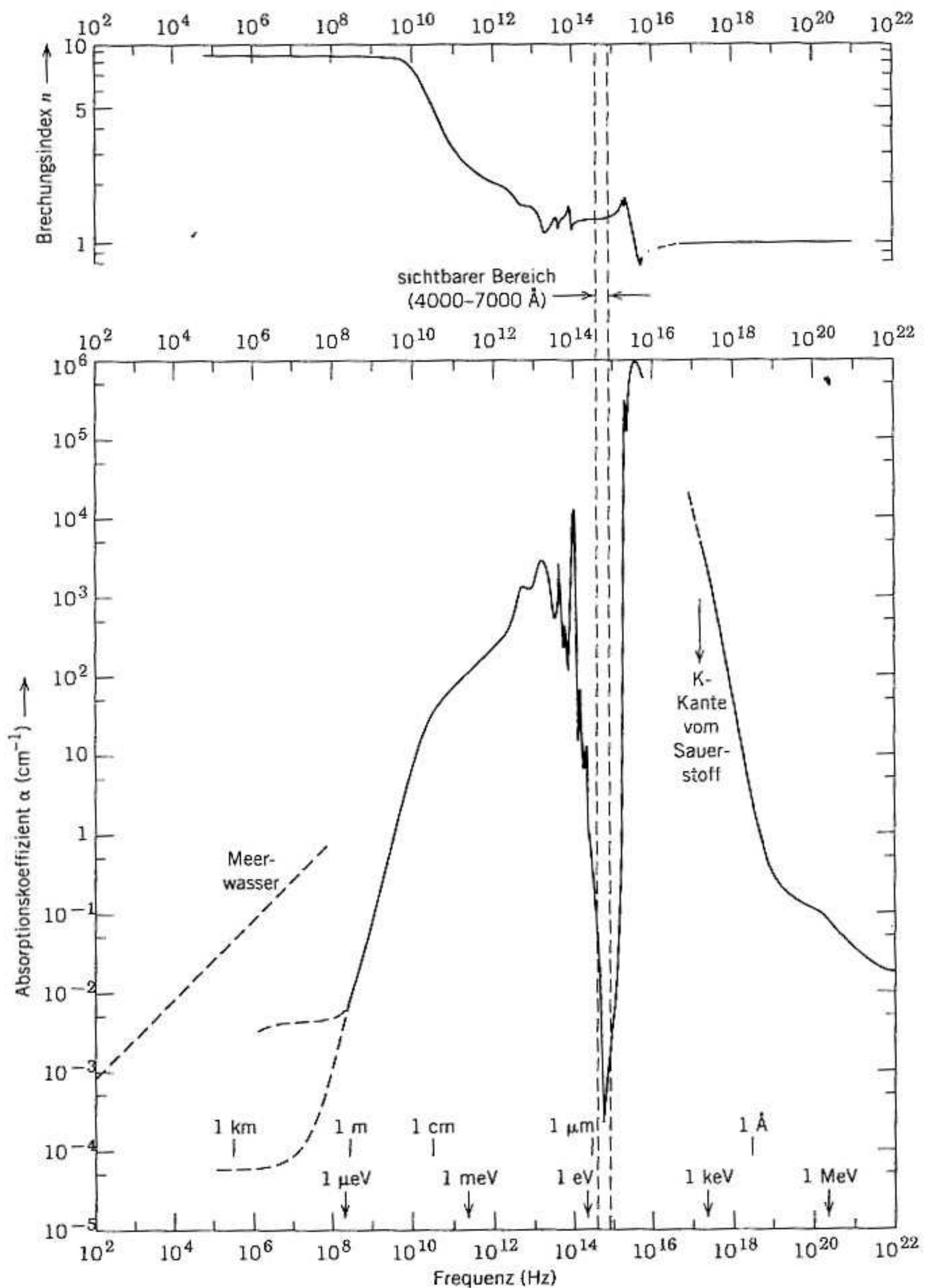


Abb. 7.9 Brechungsindex (oben) und Absorptionskoeffizient (unten) von flüssigem Wasser als Funktion der Frequenz. Auf der Abszisse sind auch die zugehörigen Energien (Pfeile) und Wellenlängen (vertikale Striche) eingetragen. Der sichtbare Bereich des Frequenzspektrums ist durch zwei gestrichelte vertikale Linien markiert. Den Verlauf des Absorptionskoeffizienten von Meerwasser zeigt die gestrichelte schräge Linie links. Man beachte, daß die Maßstäbe in beiden Richtungen logarithmisch sind.

b) Metalle

Früher: Thomson Modell: $\hat{\epsilon}_k(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_k} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_k}$, $\hat{\epsilon} = 1 + n_v \sum_{k=1}^K \underbrace{f_k(\alpha'_k + i\alpha''_k)}_{\hat{\epsilon}_k(\omega)}$

Metall: freie Elektronen, keine Rückstellkraft

\Rightarrow Typ 1, f_1 $\Rightarrow \omega_1^2 = 0$

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \omega_p^2 \frac{f_1}{-\omega^2 - i\omega\Gamma} + \omega_p^2 \sum_{j=2}^K \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} = \hat{\epsilon}_b(\omega) - \omega_p^2 \frac{f_1}{\omega(\omega + i\Gamma)}$$

Isolatorterm

Falls wir den Bereich der Resonanzen in $\hat{\epsilon}_b(\omega)$ ausschließen ($\omega \ll \omega_j$)
 $\Rightarrow \hat{\epsilon}_b(\omega) = 1$

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = 1 - \omega_p^2 f_1 \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega + i\Gamma} \frac{1}{\omega - i\Gamma} = 1 - f_1 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} (\omega - i\Gamma) \Rightarrow \epsilon' \epsilon''$$

Gesucht: Zusammenhang mit $\hat{\sigma}(\omega)$: Zurück nach 6.1 $\hat{\epsilon}_r$: Isolator $\hat{\epsilon}_b(\omega)$

$$\frac{1}{\hat{\epsilon}_r} = \frac{1}{\hat{\epsilon}_b} + i \frac{\mu_r \mu_0}{\omega} \hat{\sigma} \quad \left| \frac{c^2}{\mu_r} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \mu_r} \right. \quad \Rightarrow \hat{\epsilon}_r(\omega) = \frac{1}{\hat{\epsilon}_b} \frac{c^2}{\mu_r} = \frac{1}{\hat{\epsilon}_b} \frac{c^2}{\mu_r} + i \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \hat{\epsilon}_b(\omega) + i \underbrace{\omega_p^2 f_1 \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)}}_{\frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\omega \epsilon_0}} \Rightarrow \hat{\sigma}(\omega) = i \epsilon_0 \omega_p^2 f_1 \frac{1}{\omega + i\Gamma} \frac{\omega - i\Gamma}{\omega - i\Gamma} = \epsilon_0 \omega_p^2 f_1 \left(\frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} + \frac{i\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \right)$$

$n_v f_1 \frac{e^2}{m}$, messbar: $n_v f_1$
 $\hat{\sigma}(0) = n_v f_1 \frac{e^2}{m} \frac{1}{\Gamma}$
 exp

Beispiel: Cu:

$$n f_1 \approx 8 \cdot 10^{28} \frac{e^-}{m^2}, \quad \sigma(0) = 5,9 \cdot 10^7 \frac{A}{Vm}$$

$$e_v, m_v \Rightarrow \Gamma \approx 4 \cdot 10^{13} \frac{1}{s} \text{ infrarot} \Rightarrow \omega \ll 4 \cdot 10^{13} \frac{1}{s} \Rightarrow \hat{\sigma}'(\omega) \gg \hat{\sigma}''(\omega)$$

\Rightarrow Leitfähigkeit erst im Infraroten komplex

$$\Rightarrow \hat{\epsilon}_r(\omega) \approx i f_1 \frac{\omega_p^2}{\Gamma \omega} = i \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0 \omega} \quad (\omega \ll \Gamma)$$

komplexer Brechungsindex: $\hat{n} = \bar{n} + i\gamma \Rightarrow \bar{n}^2 = \frac{1}{2} \mu_r \epsilon_r'' = \gamma^2 = \frac{\sigma(0)}{2\epsilon_0 \omega} \Rightarrow \delta = \frac{c}{\gamma \omega} = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma(0)}}$

$\sim \omega^{-1/2} \Rightarrow$ Meerwasser! (siehe Zusatzblatt)

$$\Rightarrow \text{mit } \omega \approx 10^{14} \text{ Hz} \Rightarrow \delta \approx 10^{-9} \text{ cm}$$

starker Skin-Effekt: el. magn. Fluss kann nur sehr wenig eindringen

Jetzt: $\omega \gg \Gamma$: $\hat{\epsilon}_r = 1 - f_1 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\hat{n} = \sqrt{\hat{\epsilon}_r} = \sqrt{1 - f_1 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \begin{cases} i \sqrt{f_1 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}, & \omega < \omega_p \sqrt{f_1} \\ \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 f_1}{\omega^2}}, & \omega > \omega_p \sqrt{f_1} \end{cases}$

Übung: $R = \left| \frac{\hat{n} - 1}{\hat{n} + 1} \right| = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_p \\ \frac{(\bar{n} - 1)^2}{(\bar{n} + 1)^2}, & \omega > \omega_p \end{cases}$



9 Reflexion und Brechung

9.1 Brechungsgesetz

2 Medien: $\mu_r^{(1)}, \mu_r^{(2)}, \epsilon_r^{(1)}, \epsilon_r^{(2)}$

Grenzfläche sei Ebene, wird durch Normalenvektor \vec{n} charakterisiert

Grenzfläche: Ladungsfrei, keine Oberfl. ströme, Stetigkeitsbed.: D_n, B_n, H_t, E_t stetig

$$1) \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad : E_t$$

$$2) \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad : D_n$$

$$3) \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad : H_t$$

$$4) \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad : B_n$$

Betr. Welle, die mit \vec{k}_1 von unten auf die Trennebene einfällt

Wahl des Koordsys: $\vec{n} = \vec{e}_z \Rightarrow k_y = 0$ (durch Projektion auf x-y und Drehung alter \vec{e}_x in Proj.-Ri)

Einfallebene: e_x, \vec{e}_z



vorgeg.: $\mu_1, \mu_2, \epsilon_1, \epsilon_2$



einfallend: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{B}_1 = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1) = \frac{1}{n_1} (\frac{\vec{k}_1}{k_1} \times \vec{E}_1)$

reflektiert: $\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{r} - \omega t)}$
 $\vec{B}_{1r} = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r})$ RB: ω wie in \vec{E}_1 , später

gebrochen: $\vec{B}_2 = \frac{1}{\omega} \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{k_2}$

Randbedingungen $z=0$ 1-4 müssen für $E_z, H_z, B_n, D_n \forall x, y$ erfüllt sein $\forall t$.

\Rightarrow Phasenfaktoren der 3 Wellen müssen unabh. von der expliziten Randbedingung bei $z=0$ übereinstimmen

$\Rightarrow \vec{k}_1 \vec{r} - \omega t |_{z=0} = \vec{k}_{1r} \vec{r} - \omega t |_{z=0} = \vec{k}_2 \vec{r} - \omega t |_{z=0} \quad \forall r \forall t \Rightarrow \omega$ alle gleich (vorr.)

$k_{1y} = 0, k_{1x} x = k_{1rx} x + k_{1ry} y = k_{2x} x + k_{2y} y : \forall x \forall y$

$\Rightarrow k_{1y} = k_{2y} = 0, k_{1x} = k_{1rx} = k_{2x}$

$k_1 \sin(\vartheta_1) = k_{1r} \sin(\vartheta_{1r}) = k_2 \sin \vartheta \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{v_1} = k_{1r} \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_{1r}$

Reflexionsgesetz

2) $\frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(2)}}}{\sqrt{\epsilon_r^{(1)}}}$

Snellius-Brechungsgesetz

Medium 2: $n_2 > n_1$ (optisch dichter als 1)

$\Rightarrow \sin(\vartheta_1) > \sin(\vartheta_2) \Rightarrow \vartheta_1 > \vartheta_2$: Strahl wird zum Lot hin gebrochen

Falls $n_1 < n_2$: vom Lot weg gebrochen.

Maximales $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Grenzwinkel $\vartheta_1 = \vartheta_g = \frac{n_2}{n_1}$

9.2 Intensitäten bei Reflexion und Brechung bei dem Totalreflexion eintritt

- 1) $\vec{n} \times (\vec{E}_{0z} - (\vec{E}_{01} + \vec{E}_{01r})) = 0 \quad E_t$ stetig
- 2) $\vec{n} \cdot (\epsilon_r^{(2)} \vec{E}_{0z} - \epsilon_r^{(1)} (\vec{E}_{01} + \vec{E}_{01r})) = 0 \quad D_n$ stetig
- 3) $\vec{n} \times (\frac{1}{\mu_r^{(2)}} (\vec{k}_2 \times \vec{E}_{0z}) - \frac{1}{\mu_r^{(1)}} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_{01} + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{01r})) = 0 \quad H_t$ stetig
- 4) $\vec{n} \cdot ((\vec{k}_2 \times \vec{E}_{0z}) - (\vec{k}_1 \times \vec{E}_{01} + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{01r})) = 0 \quad B_n$ stetig

Jetzt: $\vec{E}_{01} = \vec{E}_{01||} + \vec{E}_{01\perp}$

1) $\vec{E}_{01||}$
 Gl. 4 trivial erfüllt

2) $\Rightarrow \epsilon_r^{(2)} E_{0z||} \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2) - \epsilon_r^{(1)} (E_{01||} \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1) + E_{01r||} \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1)) = 0$

$\Rightarrow \frac{\epsilon_r^{(2)}}{\mu_r^{(2)}} \frac{n_2}{n_1} = (E_{01||} + E_{01r||})$

Aus 1 folgt:

$E_{0z||} \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2) - E_{01||} \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1) + E_{01r||} \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1) = 0$

$E_{0z||} \cos(\vartheta_2) = (E_{01||} - E_{01r||}) \cos(\vartheta_1)$

* ** $\Rightarrow E_{01||}, E_{01r||}$, ** $\Rightarrow E_{01r||} = E_{01||} - E_{0z||} \frac{\cos(\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_1)}$
 * $\Rightarrow E_{01r||} = -E_{01||} - E_{0z||} A$

subtr. $\Rightarrow 2E_{01||} = E_{0z||} (A + \frac{\cos(\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_1)})$, $\cos(\vartheta_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\vartheta_2)} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_1} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \sin \vartheta_1)^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) = \frac{2 \cos(\vartheta_1)}{A + \frac{\cos(\vartheta_2)}{\cos(\vartheta_1)}} \cos(\vartheta_1) \Rightarrow \left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) = \frac{2 n_1 n_2 \cos(\vartheta_1)}{\frac{n_1^2}{n_2^2} n_2^2 \cos(\vartheta_1) + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\vartheta_1)}} \quad \text{weg}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) = -1 + \left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) \frac{\frac{n_1^2}{n_2^2} n_2^2 \cos(\vartheta_1)}{A} = + \frac{\frac{n_1^2}{n_2^2} n_2^2 \cos(\vartheta_1) - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\vartheta_1)}}{\frac{n_1^2}{n_2^2} n_2^2 \cos(\vartheta_1) + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\vartheta_1)}}$$

In Übung wird gezeigt: $\left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) = \frac{2 n_1 \cos(\vartheta_1)}{n_1 \cos(\vartheta_1) + \frac{n_1^2}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\vartheta_1)}} \Rightarrow \left(\frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right) = \frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} - 1$

9.3 Energietransport

3 Wellen (einf., geb., refl.) transportieren Energie

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} |E_0|^2 \frac{\vec{h}}{k}$$

1) Reflexionskoeffizient: $R = \left| \frac{\vec{S}_{ref} \cdot \vec{n}}{\vec{S}_{inc} \cdot \vec{n}} \right|$

2) Transmissionskoeffizient: $T = \left| \frac{\vec{S}_{tr} \cdot \vec{n}}{\vec{S}_{inc} \cdot \vec{n}} \right|$

$\vec{k}_1 \cdot \vec{n} = k_1 \cos(\vartheta_1)$
 $\vec{k}_{ref} \cdot \vec{n} = k_1 \cos(\pi - \vartheta_1) = -k_1 \cos(\vartheta_1)$
 $\vec{k}_2 \cdot \vec{n} = k_2 \cos(\vartheta_2)$
 $\Rightarrow R = \left| \frac{E_{0z11}}{E_{0z11}} \right|^2, T = \sqrt{\frac{\epsilon_r^{(2)} \mu_r^{(2)} \cos(\vartheta_2)}{\epsilon_r^{(1)} \mu_r^{(1)} \cos(\vartheta_1)}} \left| \frac{E_{0z21}}{E_{0z11}} \right|^2$

Man kann zeigen: $R + T = 1$

Im weiteren: $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$

$R_{\perp}(\vartheta_1), R_{\parallel}(\vartheta_1), R_{\perp}(\vartheta_1) : \vartheta_1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2 n_1}{n_1 + n_2} - 1 \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_{\perp}(\frac{\pi}{2}) = 1$

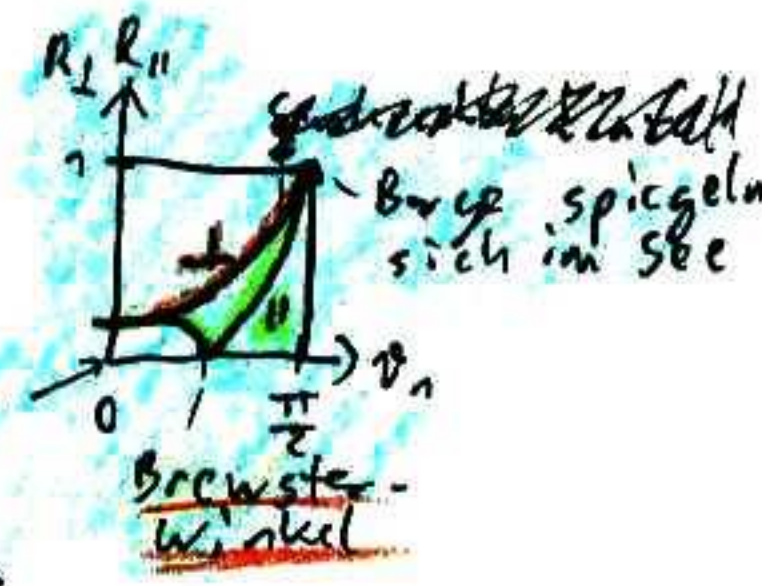
$R_{\parallel}(\vartheta_1) : \vartheta_1 = 0 \Rightarrow R_{\parallel} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

$R_{\parallel} = 0:$

$n_2 \cos(\vartheta_2) = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2(\vartheta_1)}$

Behauptung: $\tan(\vartheta_2) = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\tan(\vartheta_2) \cos(\vartheta_2)}{\sin(\vartheta_2)} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\vartheta_1)} = \sin(\vartheta_2)$

d.h. bei ϑ_2 : nur parallel-Komponente von \vec{E}_0 reflektiert!
 senkrecht (reflin. polarisiert! \perp Einfallsebene)



10 Hohlraumwellen (metallische Hölräume)



$\frac{a}{\lambda}$ groß \Rightarrow e.m. Welle kann nicht in das Metall eindringen.

Wellenleiter

$\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \rightarrow \infty$ (ideal leitende Wände)

Randbedingungen: E_{tang} stetig (Kap. 9) $\Rightarrow B$ normal stetig.

Gesucht: Lösungen von $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}, \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}}$ unter RB!

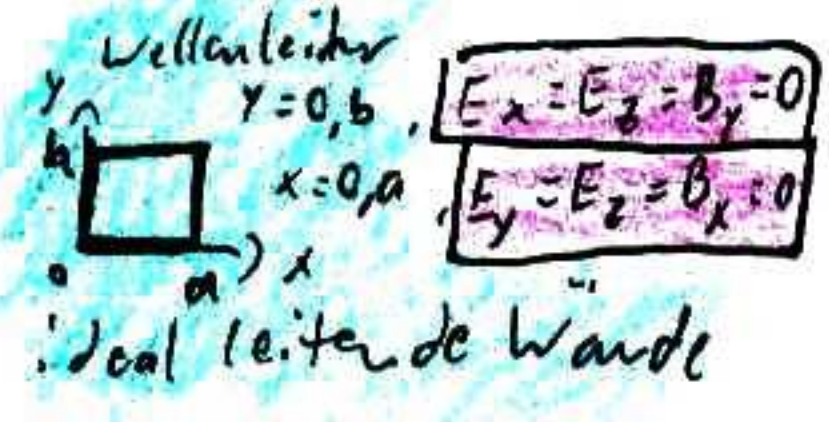
Karth. Koord.:

\Rightarrow Separationsansatz in Karth. Koord. für die einzelnen Komp \vec{E}, \vec{B}

$E_x = \alpha f_1(x) f_2(y) f_3(z) T(t) \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} f_1(x) \right) f_2 f_3 T + \left(\frac{d^2}{dy^2} f_2(y) \right) f_1 f_3 T + \left(\frac{d^2}{dz^2} f_3(z) \right) f_1 f_2 T$

$\frac{1}{T f_1 f_2} \left(\frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right) f_1 f_2 f_3 = -\omega^2 T(t) \Rightarrow \omega^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \frac{d^2}{dx^2} f(x) + k^2 f(x) = 0$

$\Rightarrow k$ aus Randbedingung, Ansatz: $E_x = \alpha \sin(k_1 x + \vartheta_1) \sin(k_2 y + \vartheta_2) e^{-i(k_3 z - \omega t)}$
 \perp RB
 Wellen in z-R.



$$E_x(x, 0, z) = E_x(x, b, z) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, k_1 = \frac{m\pi}{b}, m = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_y = \beta \sin(k_3 x + \alpha_3) \sin(k_4 y + \alpha_4) e^{i(\dots)} \Rightarrow E_y(0, y, z) = E_y(a, y, z) \Rightarrow \alpha_3 = 0, k_3 = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_z = \gamma \sin(k_5 x + \alpha_5) \sin(k_6 y + \alpha_6) e^{-i(\dots)}$$

$$0 = E_z(0, y, z) = E_z(a, y, z) \Rightarrow \alpha_5 = 0, k_5 = \frac{n'\pi}{a}, n' = 1, 2, \dots$$

$$0 = E_z(x, 0, z) = E_z(x, b, z) \Rightarrow \alpha_6 = 0, k_6 = \frac{m'\pi}{b}, m' = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Also: } E_x = \alpha \sin(k_1 x + \alpha) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(kz - \omega t)}$$

$$E_y = \beta \sin(k_4 y + \alpha) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-i(kz - \omega t)}$$

$$E_z = \gamma \sin\left(\frac{n'\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{b} y\right) e^{-i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha k_1 \cos(k_1 x + \alpha) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) + \beta k_4 \sin(k_4 y + \alpha) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) - i \gamma k \sin\left(\frac{n'\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{b} y\right) = 0 \quad \forall x, y$$

$$x: \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, k_1 = \frac{n\pi}{a}, n' = n \quad y: \alpha_4 = \frac{\pi}{2}, k_4 = \frac{m\pi}{b}, m = m'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(kz - \omega t)} \\ E_y = \beta \sin(\dots) \cos(\dots) e^{-i(kz - \omega t)} \\ E_z = \gamma \sin(\dots) \sin(\dots) e^{-i(kz - \omega t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{n\pi}{a} + \beta \frac{m\pi}{b} = -i \gamma k \\ \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\text{B-Feld: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i \omega B_x$$

$$\Rightarrow \left(\gamma \frac{m\pi}{b} + \beta i k\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(\dots)} = -i \omega B_x$$

$$\Rightarrow B_x = \alpha' \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(\dots)}$$

$$\alpha' = \frac{\gamma m \pi + \beta i k}{-i \omega}$$

$$\text{ebenso: } \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i \omega B_y \Rightarrow B_y = \beta' \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(\dots)}$$

$$\beta' = \frac{-i k \alpha - \frac{\pi n}{a} \gamma}{-i \omega}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i \omega B_z, \quad B_z = \gamma' \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-i(\dots)}$$

$$\gamma' = \frac{-\frac{\pi n}{a} \beta - \frac{\pi m}{b} \alpha}{-i \omega}$$

Weitere Bedingungen für die Amplituden aus weiterer Maxwellgl.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{i \omega}{c^2} E_x \Rightarrow -\frac{\pi m}{b} \gamma' + i k \beta' = i \frac{\omega}{c^2} \alpha \quad (4)$$

$$\text{und ebenso: } -i k \alpha' + \frac{\pi n}{a} \gamma' = i \frac{\omega}{c^2} \beta, \quad -\frac{\pi n}{a} \beta' + \frac{\pi m}{b} \alpha' = i \frac{\omega}{c^2} \gamma \quad (5)$$

Frage: Wie sehen die Lösungen aus?

ohre Wände \Rightarrow transversale Wellen in z-Richtung, d.h. $y = y' = 0$

$$\text{sonst } \Rightarrow (4) \Rightarrow k \beta' = \frac{\omega}{c^2} \alpha \Rightarrow k \beta' = \frac{k^2 \alpha}{\omega} \Rightarrow \frac{\omega}{c^2} = \frac{k^2}{\omega} \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 \quad (*)$$

$$(2) \Rightarrow k \alpha = \omega \beta'$$

$$\Rightarrow n = m = 0 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow B = 0$$

\Rightarrow Es gibt keine transversale Wellen im Hohlleiter
 E_z & B_z nicht beide $\equiv 0$!

Betr. nun 2. Fälle: 1. $E_z = 0, H_z \neq 0$: transversale E-Welle

2. $E_z \neq 0, H_z = 0$: transversale H-Welle

1) TE (transversal elektrisch), $E_z = 0, B_z \neq 0$

$y = 0$ (a) $y = b$ einfachste Lösung: $n = 1, m = 0 \Rightarrow \omega = i \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + k^2}, E_x = E_y = 0$
 tiefste Frequenz: $k = 0 \Rightarrow \omega = c \frac{\pi}{a}$ "Hochpassfilter"
 die durch Wellenleiter durchgehen kann. $B_x, B_z \neq 0$

2) TM-Welle (transmagn), $B_z = 0, E_z \neq 0$

$$y' = 0, y \neq 0; m = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow m \neq 0; n = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow n \neq 0; m = 1, n = 1 \Rightarrow \omega^2 = c^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) + k^2$$

11. Erzeugung el. magn. Wellen

11.1 Retardierte Potentiale

φ, \vec{A} , $\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0$ (Lorentz-Feldung)

$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}) \vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{M}_0(\vec{r}, t) \Rightarrow$ 3 Gl. für A_x, A_y, A_z

$\oplus (\quad) \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$

\Rightarrow 4 entkoppelte Dgl für A_x, A_y, A_z, φ .

Jede Komp. hat dieselbe Struktur. Aus Lösung für φ folgt Lsg. von A_x wenn man ρ/ϵ_0 durch $\mu_0 \cdot j_x$ ersetzt.

\Rightarrow Inhomogene Gleichung \Rightarrow Allg. Lösung = homogene Lsg. + spezielle Lsg.

homog. Lösung wird benötigt für Anfangsbedingungen

Kap 7.4 homog. Lsg. bestimmt:

$\varphi_{hom} = \text{Re} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z (a_-(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + a_+(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} + \omega t)} \right)$

$a_+(\vec{k})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fouriertransformierte der Anfangsbedingungen } \varphi(\vec{r}, 0), \dot{\varphi}(\vec{r}, 0) \\ a_-(\vec{k}) \end{array} \right.$

Spezielle Lösung:

$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \phi(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \Leftrightarrow \rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$

Einsetzen in \oplus

$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi(\vec{r}, \omega) + \frac{\rho(\vec{r}, \omega)}{\epsilon_0} e^{-i\omega t} = 0$, gilt $\forall t$

$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi(\vec{r}, \omega) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, \omega)$

Gesucht: Lösung von $\oplus \oplus$

Umweg nötig: Wir wissen $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ (allg. Zerlegungssatz)

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0$, $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Behauptung:

$(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

Δ in Kugelkoord $\Rightarrow \Delta b(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rb)$

$\Rightarrow (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r + k^2) e^{\pm ikr} \right) + \frac{k^2}{r} e^{\pm ikr}$

\Rightarrow a) $r \neq 0: \delta(\vec{r}) = 0$ \uparrow
 $= 0$ für $r \neq 0$

b) $\int d^3r' f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = f(0)$

b) $\Rightarrow \iiint_{r \leq \epsilon} d^3r f(\vec{r}) (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \iiint_{r \leq \epsilon} d^3r f(\vec{r}) (\Delta + k^2) \left(\frac{1}{r} \pm \frac{ikr}{r} - \frac{1}{2} \frac{k^2 r^2}{r} + \dots \right)$

$= \iiint_{r \leq \epsilon} d^3r f(\vec{r}) \underbrace{\Delta \frac{1}{r}}_{-4\pi\delta(\vec{r})} + O(\epsilon^2) = -4\pi f(0)$

$\iiint_{r \leq \epsilon} r^\alpha, \alpha = -1, 0, 1, 2 = 4\pi \int_0^\epsilon r^{2+\alpha} dr \sim \epsilon^{2+\alpha+1} = \epsilon^{2+\alpha+1} = \epsilon^2$

Behauptung: $(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

$(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}) \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Beweis: $\Delta \varphi(\vec{r}, \omega) = \varphi_0 \int d^3r' \rho(\vec{r}', \omega) \Delta \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$= \varphi_0 (-4\pi\rho(\vec{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(\vec{r}, \omega))$

$\varphi(\vec{r}, \omega) = \frac{\varphi_0}{2\pi\epsilon_0} \iiint d^3r' \rho(\vec{r}', \omega) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

vgl. mit $\Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
 $\Rightarrow \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3r' \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s(\vec{r}', \omega) \frac{e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} s(r, t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) \right)$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3r' \frac{s(r', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Wenn sich s bei r' bei einem bestimmten Zeitpunkt ändert, dann pflanzt sich dies durch verursachte Änderung des el. magn. Feldes mit Lichtgeschwindigkeit c fort. In der Entfernung $|\vec{r}-\vec{r}'|$ ändert sich das Feld daher zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$.

$\varphi \rightarrow$ retardiert, Kausalität
 Hier nur + betrachtet bei ... tikt
 - : $\varphi \rightarrow$ avanciert verletzt Kausalität! (Wirkung vor Ursache!)

11.2 zeitlich Oszillierende Quellen



Vorgehen wie bei Multipolentwicklung.
 Zurück zu $\odot\odot\odot$: Betrachte $\vec{A}(\vec{r}, t)$

Fourierzerlegung: $s(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$, $\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{j}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$
 $\odot\odot\odot \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) e^{i\omega(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}$
 $e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}} = e^{i\omega(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', \omega)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\omega \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}$

Aus \vec{A} : φ -Best. : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$
 $\vec{E} = \dots E(\dots)$

$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{E}(\vec{r}, \omega)$

also: $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, \omega))$

Bestimmung von $\vec{A}(\vec{r}, \omega)$:

Betrachte kleine Quellen $d \ll \lambda, d \ll |\vec{r}|$
 $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}' \cdot \hat{e}_r} \approx r \sqrt{1 - \frac{2}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \approx r(1 - \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}') = r - \vec{e}_r \cdot \vec{r}'$

\Rightarrow a) $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} = e^{ikr} e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \approx e^{ikr} (1 - ik\vec{r}' \cdot \vec{e}_r)$
 b) $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}'} \approx \frac{1}{r} (1 + \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}') \Rightarrow \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}') (1 - ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}') \approx \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}' - ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}') = \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \frac{1}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{r}' (1 - ik))$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', \omega) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (1 - ik) \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', \omega) (\vec{e}_r \cdot \vec{r}')$

$\vec{A}_1 \rightarrow$ el. Dipolstrahlung magn. Dipolstr. & d. Quadrupolstrahlung
 Im Weiteren: nur Fernzone (Strahlungszone) verschw. in Fernzone
 $d \ll \lambda \ll r$

11.3 Elektrische Dipolstrahlung

Gesucht: $\int d^3r \vec{j}(\vec{r}, \omega)$

Trick: Sei x_i Karth. Komp v. \vec{r} .

$\Rightarrow \vec{\nabla}(x_i \vec{j}(\vec{r})) = x_i \vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \frac{\partial x_i}{\partial r} \Rightarrow \int d^3r \vec{j}_i = \int d^3r \vec{\nabla}(x_i \vec{j}(\vec{r})) - \int d^3r x_i \vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r})$

Gauß \rightarrow Volumen $\Rightarrow 0$
 unendlich wählen

$$\Rightarrow \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, \omega) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}, \omega) = - \int d^3r \vec{r} (\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega))$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega) = i\omega \rho(\vec{r}, \omega) = 0 \Rightarrow - \int d^3r \vec{r} \cdot (\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega)) = -i\omega \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}, \omega)$$

$$\Rightarrow \vec{A}_1(\vec{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (-i\omega) \vec{p}(\omega) \quad \text{el. Dipolmom. } \vec{p}(\omega)$$

$$\Rightarrow \vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega) \vec{p}(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \quad \Rightarrow \vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$$

Beispiel: El. Dipol rotiert mit konst. Winkelgeschw. ω in x-y-Ebene:



$$p_x = p_0 \cos(\omega t)$$

$$p_y = p_0 \sin(\omega t)$$

$$p_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r} (-\sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \hat{e}_x + \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) \hat{e}_y)$$

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A}_1, \quad \nabla \times (\vec{a} \varphi) = \varphi \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \times \nabla \varphi, \quad \vec{a} = \vec{p}(\omega) \text{ unabh. v. } \vec{r}, \quad \varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \hat{e}_r \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} = \hat{e}_r ik \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}, \omega) = 4\pi (k\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) (\hat{e}_r \times \vec{p})$$



$\vec{B}_1 \perp \vec{r}, \vec{p}$, Falls \vec{p} in z-Achse \vec{B}_1 konzentrische Kreise um z-Achse

$$\Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}, \omega) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \vec{B}_1(\vec{r}, \omega) \approx c \vec{B}_1(\vec{r}, \omega) \times \hat{e}_r$$

$\vec{B}_1 \perp \hat{e}_r, \vec{E}_1 \perp \hat{e}_r$ Lokales Poynting

11.3.1 El. magn. Energie und Poynting-Vektor

$$\text{Ab jetzt: } \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}_1(\vec{r}, t) = \vec{B}_1(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Gesucht: $\vec{w}_1(\vec{r}, \omega), \vec{s}_1(\vec{r}, \omega)$

$$\vec{w}_1(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_0} |\vec{B}_1|^2 + \epsilon_0 |\vec{E}_1|^2 \right) = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}_1|^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{1}{c^2} \frac{1}{r^2} \omega^4 p^2 \sin^2(\theta)$$

$$\vec{s}_1(\vec{r}, \omega) = c \vec{w}_1 \hat{e}_r$$

11.3.2 Bewegte Punktladung

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{\text{Trick}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\delta\left(\frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} - t + t'\right)}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \right]$$

$$\text{Ebenso: } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \vec{v}(t') \cdot [\dots]$$