

Besprechung zu Blatt 9 zu Analysis 3

Aufgaben wichtig für Klausur!

Aufgabe 1

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

$\sigma, r, b > 0$ Konstanten

- a) Gleichgewicht (x_0, y_0, z_0) ist stabil, wenn alle EW von $J_f(x_0, y_0, z_0)$ negativen Realteil haben (Def. 10.1, Satz 10.2)

0 ist Gleichgewicht von Lorenz-System.

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$J_f(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

λ Eigenwerte von $J_f(0)$

$$0 = \det(J_f(0) - \lambda K) = \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = (-\sigma - \lambda)((-1 - \lambda)(-b - \lambda) - 0) - r(\sigma(-b - \lambda) - 0) + 0$$

$$\begin{aligned} &= -(\sigma + \lambda)(b + \lambda + \lambda b + \lambda^2) + r\sigma b + r\sigma\lambda \\ &= -\sigma b - \sigma\lambda - \lambda b\sigma - \lambda^2 b - \lambda^3 + r\sigma b + r\sigma\lambda \\ &= -b(\sigma + \lambda\sigma + \lambda + \lambda^2 - r\sigma) - \lambda(\sigma + \sigma\lambda + \lambda^2 + r\sigma + \lambda) \\ &= -(b + \lambda)(\sigma(r - 1) + \lambda(\sigma + 1) + \lambda^2) \\ &\Rightarrow \lambda = \underbrace{-b}_{<0} \text{ oder } \lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) - \sigma(r - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + \sigma(r-1)}$$

$$r > 1 : \sigma(r - 1) > 0$$

$$\Rightarrow \lambda_+ = -\frac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + \sigma(r-1)}_{> \left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2}} > -\frac{\sigma+1}{2} + \frac{\sigma+1}{2} = 0$$

$\Rightarrow 0$ nicht stabil

$$r < 1 : \sigma(r - 1) < 0$$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + \sigma(r-1)}_{< \left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2}} < -\frac{\sigma+1}{2} + \frac{\sigma+1}{2} = 0$$

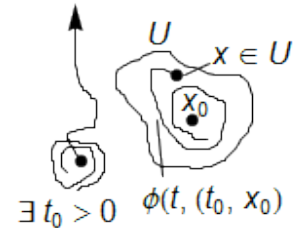
$\Rightarrow 0$ stabil

- b) $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$
 $r \in (0, 1), ((a) \Rightarrow 0 \text{ stabil})$

10.5 (Liapunov-Funktion):

V ist L-Funktion von Lorenz-System, wenn \forall Lösungen (x, y, z) von Lorenz-System: $\frac{d}{dt}(V \circ (x, y, z))(t) \leq 0, \frac{d}{dt}(V \circ (0))(t) = 0$

Satz 10.7: Gibt es eine L-Funktion V , ist (x_0, y_0, z_0) ein isoliertes Gleichgewicht und ein striktes Min von V , dann ist dieses Gleichgewicht (asymptotisch) stabil.



Sei (x, y, z) eine Lösung des Lorenz-Systems.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \frac{d}{dt}(V \circ (x, y, z))(t) &= \frac{d}{dt}(x(t)^2 + \sigma y(t)^2 + \sigma z(t)^2) \\ &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2\sigma y(t)\dot{y}(t) + 2\sigma z(t)\dot{z}(t) \\ &= 2(x(t) + \sigma(y(t) - x(t)) + \sigma y(t)(rx(t) - y(t) - x(t)z(t))) + \sigma z(t)(x(t)y(t) - bz(t)) \\ &= 2(\sigma xy - \sigma x^2 + \sigma rxy - \sigma y^2 - \sigma xyz + \sigma xyz - \sigma bz^2) \\ &= -2\sigma(x^2 + y^2 - xy(1+r)) - 2\sigma bz^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy \geq 0: \quad 2\sigma xy(1+r) &\leq 2\sigma xy(1+1) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}(V \circ (x, y, z))(t) \leq -2\sigma(x^2 + y^2 - 2xy) - 2\sigma bz^2 \\ &= -2\sigma(x-y)^2 - 2\sigma bz^2 \begin{cases} < 0 & , (x, y, z) \neq 0 \\ = 0 & , (x, y, z) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy \leq 0: \quad xy(1+r) &< 2xyr \\ \frac{d}{dt}(V \circ (x, y, z))(t) &\leq -2\sigma(x^2 + y^2 - 2xyr) - 2\sigma bz^2 \\ -2\sigma x^2 &< -2\sigma x^2 r \Rightarrow \dots \leq -2\sigma(r^2 x^2 + y^2 - 2xyr) - 2\sigma bz^2 \\ &= -2\sigma(rx-y)^2 - 2\sigma bz^2 = \begin{cases} < 0 & , (x, y, z) \neq 0 \\ = 0 & , (x, y, z) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow V$ eine (strikte) Liapunov-Funktion

0 ist striktes lokales Minimum

Um Satz 10.7 anzuwenden fehlt noch, dass 0 ein isoliertes Gleichgewicht von Lorenz-System ist.

Dazu suchen wir weitere Gleichgewichte vom Lorenz-System, falls überhaupt weitere Vorhanden.

Seien $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ Gleichgewichte, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(y-x) &\Rightarrow x &= y \\ 0 &= rx - y - xz &\Rightarrow 0 &= x(r-1-z) \\ 0 &= rx - bz &\Rightarrow 0 &= x^2 - bz \end{aligned}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow bz = x^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow (x, y, z) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow r-1-z = 0 \Rightarrow z = r-1 < 0 \text{ (da } r < 1\text{)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 = bz < 0 \text{ (Widerspruch!)}$$

$\Rightarrow 0$ einziges Gleichgewicht, insbesondere ein isoliertes Gleichgewicht!

Jetzt können wir Satz 10.7 anwenden und erhalten, dass 0 stabil ist.

Aufgabe 3

Bewegungsgleichung Kosmonaut: $r_L(t) = 1, \varphi_L(t) = t$

Linse: r, φ mit $r(0) = 1, \dot{r}(0) = v_0 < 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_L, \quad r_1 = r_L \\ r &= r_L + r_1 v_0 + O(v_0^2) \\ \varphi &= \varphi_L + \varphi_1 v_0 + O(v_0^2) \end{aligned}$$

Es gilt: $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} = \ddot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) - \underbrace{((1 + r_1 v_0 + O(v_0^2))(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2)))^2}_{=(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2) + r_1 v_0 + r_1 \dot{\varphi}_1 v_0^2 + r_1 v_0 O(v_0^2) + O(v_0^2) + \dot{\varphi}_1 v_0 O(v_0^2) + O(v_0)^2)(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2))} \\ &+ \frac{1}{(1 + r_1 v_0 + O(v_0^2))^2} \\ &= \ddot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) - (1 + 2\dot{\varphi}_1 v_0 + r_1 v_0) + O(v_0^2) + 1 + (-2\frac{1}{1})r_1 v_0 + (3\frac{1}{1})O(v_0^2) \\ &= \ddot{r}_1 v_0 - 1 - 2\dot{\varphi}_1 v_0 - 2r_1 v_0 + 1 - r_1 v_0 + O(v_0^2) \end{aligned}$$

$$= \ddot{r}_1 v_0 - 2\dot{\varphi}_1 v_0 - 3r_1 v_0 + O(v_0^2) \Leftrightarrow 0 = \ddot{r}_1 - 2\dot{\varphi}_1 - 3r_1 + O(v_0) \text{ (mit } v_0 \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 0 &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \\ &= (1 + r_1 v_0 + O(v_0^2))(\ddot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2)) + 2(\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2))(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2)) \\ &= \ddot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2) + 2\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) \\ &= \ddot{\varphi}_1 v_0 + 2\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) \\ &\Leftrightarrow 0 = \ddot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_1 + O(v_0) \end{aligned}$$

Jetzt: $O(v_0) \approx 0 \Rightarrow$ Wir vernachlässigen die Terme $O(v_0)$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_1, \quad 0 = \ddot{r}_1 - 2\dot{\varphi}_1 - 3r_1$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) &= \dot{\varphi}_1(0) + \int_0^t \underbrace{\ddot{\varphi}_1(s)}_{=-2\dot{r}_1(s)} ds \\ &= \dot{\varphi}_1(0) - 2r_1(t) + 2r_1(0) \end{aligned}$$

$$1 = r(0) = 1 + r_1(0)v_0 \Rightarrow r_1(0) = 0$$

$$v_0 = \dot{r}(0) = \dot{r}_1(0)v_0 \Rightarrow \dot{r}_1(0) = 1$$

$$0 = \varphi(0) = \varphi_1(0)v_0 \Rightarrow \varphi_1(0) = 0$$

$$1 = \dot{\varphi}(0) = 1 + \dot{\varphi}_1(0)v_0 \Rightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -2r_1$$

$$\Rightarrow \ddot{r}_1 = 2\dot{\varphi}_1 + 3r_1 = r_1$$

Lösungsraum und Randwertbedingung

$\dot{x} = f(x), f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ linear}$

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

Lösungsraum $\{R \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \phi(t)x_0 | x_0 \in \mathbb{R}^n\}$

(*) $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(t), g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (*)

Dann sind alle Lösungen von (*) gegeben durch:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \phi(t)x_0 + \xi(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Denn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi(t)x_0 + \xi(t)) &= \dot{\phi}(t)x_0 + \dot{\xi}(t) \\ &= f(\phi(t)x_0) + f(\xi(t)) + g(t) \\ &= f(\phi(t)x_0 + \xi(t)) + g(t) \text{ (da } f \text{ linear!)} \end{aligned}$$

(Aufgabe 4: $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi(x) = \frac{1}{2}e^x$)

Randwertproblem (Beispiel): $\dot{u}(x) = f(u(x)) + g(x), u(0) = a, u(1) = b \in \mathbb{R}^n$

Finde $a_0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \phi(x)a_0 + \xi(x)$ Randwertbedingung erfüllt

(Aufgabe 4: $g(x) = e^x$; Aufgabe 5: $g(x) = 0$)