

Hausaufgabenblatt 10: 12.01.2011

Aufgabe H10.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Bindungsenergie eines Elektrons im 1s-Zustand eines Wasserstoffatoms ($Z = 1$) und eines wasserstoffähnlichen Uranions ($Z = 92$) mit der bohrschen Formel $E_1 = -\mathcal{R}Z^2$ sowie mit der Dirac-Formel

$$E_{nj} = m_e c^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (\alpha Z)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} \quad (\text{H10.1})$$

Bilden Sie den Quotienten aus Dirac-Wert und Bohr-Wert. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe H10.2 (6 Punkte)

Die Hyperfeinaufspaltung von Energieniveaus wird hervorgerufen durch die Wechselwirkung des magnetischen Momentes $\vec{\mu}_I$ des Atomkerns mit dem durch die Hülle am Kernort erzeugten Magnetfeld

$$\vec{B}(0) = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{d\vec{\mu}}{dV} = \frac{2}{3} \mu_0 (\vec{\mu}_J)_J |\psi(\vec{r}=0)|^2 = -\frac{2}{3} \mu_0 \frac{Z^3}{\pi a_0^3} g_J \mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar} \quad (\text{H10.2})$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die wasserstoffähnliche 1s-Wellenfunktion verwendet. Ferner ist \vec{J} der Gesamtdrehimpuls der Hülle, a_0 der Bohrsche Radius μ_B das Bohrsche Magneton und g_J der g-Faktor der Elektronenhülle.

Das magnetische Moment des Kerns lässt sich ausdrücken als

$$\vec{\mu}_I = g_I \mu_K \frac{\vec{I}}{\hbar} \quad (\text{H10.3})$$

mit dem Kerndrehimpuls \vec{I} , dem g-Faktor g_I des Kerns und dem Kernmagneton $\mu_K = \mu_B/1836$.

Leiten Sie die durch diese Hyperfeinwechselwirkung verursachte Hyperfeinaufspaltung des Wasserstoff-1s-Niveaus her. Wie groß ist diese Aufspaltung (in eV oder cm^{-1}). Welche Wellenlänge hat die Strahlung, die beim Übergang vom oberen zum unteren Hyperfeinniveau emittiert wird? Was kommt für das Magnetfeld am Kernort heraus, wenn man $\langle \vec{B}(0)^2 \rangle \sim J(J+1)$ ansetzt?