

## Lösungen zum Hausaufgabenblatt 5 vom 24.11.2010

### Aufgabe H5.1 (6 Punkte)

a) Berechnen Sie (relativistisch) mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation  $\Delta x \times \Delta p \geq \hbar$  die kinetische Energie, die ein Elektron hätte, wenn es sich ausschließlich in einem  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ -Atomkern (Radius:  $3.5 \times 10^{-15}$  m) aufhielte. Kann das Elektron durch die Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung ( $Z = 20$ ) im Kern festgehalten werden?

b) Bestimmen Sie durch analoge Rechnung die kinetische Energie eines Elektrons in der Atomhülle (Radius:  $0.5 \times 10^{-10}$  m). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bindungsenergie des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

### Lösung

#### Teil a)

Für die Ortsunschärfe wird der Kerndurchmesser angesetzt, d. h.

$$\Delta x = 7 \times 10^{-15} \text{ m} = 7 \text{ fm} \quad (\text{H5.1})$$

Aus der Unschärferelation folgt

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x \quad \text{bzw.} \quad \Delta pc \geq \hbar c / \Delta x \quad (\text{H5.2})$$

Mit  $\hbar c = 197.327 \text{ MeV fm}$  folgt

$$\Delta pc \geq 28.19 \text{ MeV} \quad (\text{H5.3})$$

Die relativistische Formel für die kinetische Energie des Elektrons lautet

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 \quad (\text{H5.4})$$

Mit  $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  und mit  $pc \geq 28.19 \text{ MeV}$  aus Gl. H5.3 folgt

$$E_{\text{kin}} \geq \sqrt{28.19^2 + 0.511^2} \text{ MeV} - 0.511 \text{ MeV} = 27.68 \text{ MeV} \quad (\text{H5.5})$$

Die Gesamtenergie des Elektrons ist

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (\text{H5.6})$$

Für die potenzielle Energie kann das Coulomb-Potenzial am Kernrand angesetzt werden, da das Elektron dort am schwächsten gebunden ist.

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{H5.7})$$

Mit  $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44 \text{ MeV fm}$ ,  $Z = 20$  und  $r = 3.5 \text{ fm}$  folgt

$$E_{\text{pot}} = -8.2 \text{ MeV} \quad (\text{H5.8})$$

Der Betrag der potenziellen Energie ist erheblich kleiner als die kinetische Energie, so dass das Elektron eine positive Gesamtenergie aufweist und daher nicht als an den Kern gebunden betrachtet werden kann. Ein dauerhafter Aufenthalt eines Elektrons in einem Atomkern ist also nicht möglich.

Teil b)

Mit  $\Delta x = 10^{-10} \text{ m} = 10^5 \text{ fm}$  folgt aus Gl. H5.2

$$\Delta pc \geq \frac{197.327 \text{ MeV fm}}{10^5 \text{ fm}} = 1.973 \text{ keV} \quad (\text{H5.9})$$

und aus Gl. H5.4 folgt mit  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$

$$E_{\text{kin}} \geq \sqrt{1.973^2 + 511^2} \text{ keV} - 511 \text{ keV} = 3.81 \text{ eV} \quad (\text{H5.10})$$

Die kinetische Energie ist kleiner als die potenzielle Energie  $E_{\text{pot}} = -27.2 \text{ eV}$  im Wasserstoffatom. Wegen  $E_{\text{kin}} < |E_{\text{pot}}|$  sollte eine Bindung des Elektrons in der Atomhülle sollte möglich sein.

### Aufgabe H5.2 (4 Punkte)

- a) Geben Sie die Bindungsenergie eines Elektrons im Wasserstoffatom auf der Bahn  $n = 1000$  an. Wie groß ist der Radius dieser Bahn?
- b) Welche Bindungsenergie nach Bohr hat das Elektron im Grundzustand des wasserstoffähnlichen Argons und welche im Grundzustand des wasserstoffähnlichen Urans?

#### *Lösung*

##### Teil a)

Nach Bohr sind Bindungsenergie  $E_n$  und Bahnradius  $r_n$  im Wasserstoffatom (Kernladungszahl  $Z = 1$ )

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2} \quad (\text{H5.11})$$

$$r_n = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 \mu} n^2 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \frac{n^2}{Z} \quad (\text{H5.12})$$

Mit der Kernladungszahl  $Z = 1$  und mit  $n = 1000$  folgt  $E_{1000} = -13.6 \text{ } \mu\text{eV}$  und  $r_{1000} = 0.529 \times 10^{-4} \text{ m} = 52.9 \text{ } \mu\text{m}$ .

##### Teil b)

Grundzustand heißt  $n = 1$ . Mit Gl. H5.11 ist die Bindungsenergie im wasserstoffähnlichen Argon ( $Z = 18$ )

$$E_1(\text{Ar}) = -13.6 \text{ eV } 18^2 = -4.4 \text{ keV} \quad (\text{H5.13})$$

Für wasserstoffähnliches Uran erhält man entsprechend

$$E_1(\text{U}) = -13.6 \text{ eV } 92^2 = -115.1 \text{ keV} \quad (\text{H5.14})$$

Tatsächlich findet man experimentell, dass das Elektron im wasserstoffähnlichen Uran stärker gebunden ist (ca. 132 keV). Das Bohrsche Atommodell ist also nicht der Weisheit letzter Schluss.