1 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 10.11.2009

1.1

a) Beweis der Äquivalenzrelation:

Reflexibilität: $a \sim a \Leftrightarrow a - a = 0$. 0 ist durch jede beliebige Zahl aus $\mathbb{N}$ teilbar.

Symmetrik: Wenn $a \sim b \Leftrightarrow b - a$" durch n teilbar, so ist dies $b \sim a \Leftrightarrow a - b$ auch, da $b - a = -(a - b)$. Somit ändert sich lediglich das Vorzeichen für den Quotienten.

Transitivität: Wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, so gilt $b - a = m_1 n$ und $c - b = m_2 n$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass $b = mn + a$, was dazu führt, dass $c - m_1 n - a = m_2 n$. Somit ist $c - a = (m_1 + m_2)n$. Da m_1 und m_2 ganzzahlig sind, ist auch c-a durch n teilbar.

Da definiert wurde, dass $a \sim b$ durch $n \in \mathbb{N}$ teilbar sein muss, müssen a und b ganzzahlig, also aus der Menge $\mathbb{Z}$ stammen.

Folglich bildet die Vorschrift eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Da sich die Menge der äquivalenten Zahlen für jedes n ändert, gibt es n Äquivalenzklassen.

b) Wir setzen ein zu a äquivalentes a' bzw. ein b' zu b. Zu Zeigen ist, dass die Additionsumformung für beide Variablen-Paare die gleiche Gleichung ergibt.

Addition:

$$a \sim a' \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{a'}$$
$$b \sim b' \Leftrightarrow \overline{b} = \overline{b'}$$

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a'} + \overline{b'}$$
$$\Leftrightarrow \overline{a + b} = \overline{a' + b'}$$
$$\Leftrightarrow (a + b) \sim (a' + b')$$

Multiplikation:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a'} \cdot \overline{b'}$$
$$\Leftrightarrow \overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$$
$$\Leftrightarrow (a \cdot b) \sim (a' \cdot b')$$

Ring mit Eins:

Kommutativ:

$\overline{a} \cdot \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

Assoziativ:

$\overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{bc} = \overline{abc} = \overline{ab} \cdot \overline{c} = (\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c}$

Neutrales Element $\overline{x_0}$:

Addition:

$\overline{a} + \overline{x_0} = \overline{a + 0} = \overline{a}$

Multiplikation:

$\overline{a} \cdot \overline{x_0} = \overline{ax_0} = \overline{a}$

Inverses Element $\overline{x_{-1}}$

Addition:

$\overline{x_{-1}} := \overline{-a}$

$\overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Multiplikation:

$\overline{x_{-1}} := \overline{\frac{1}{a}}$

$\overline{a} \cdot \overline{\frac{1}{a}} = \overline{\frac{a}{a}} = \overline{1}$

Ergebnis bleibt in Menge: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$a + b := c$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{c}$

$\overline{c} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

c) n=6:

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	*0*	2	4
3	3	*0*	3	*0*	3
4	4	2	*0*	4	2
5	5	4	3	2	1

n=7:

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	6
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Da bei der Auflistung der Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mehrmals eine 0 auftritt, ist diese Menge für n=6 kein Körper. Da in n=7 keine 0 auftritt ist hier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Körper.

1.2

a) Beweis durch Widerspruch der Gegenannahme:

Annahme: es gibt kein maximales Element in der Menge $M_n := \{p \in \mathbb{N}_0 | 2^p | n\}, n \in \mathbb{N}$, Dann würde für ein beliebiges n die Potenz von einer beliebigen Zahl p aus $\mathbb{N}_0$ zur Basis 2 dieses n teilen. Da $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ wählen wir p=n.

Nun muss gelten, dass für alle n gilt: $2^n | n$, also, dass $n = q \cdot 2^n, q \in \mathbb{Z}$.

Da aber 2^n in jedem Fall größer als n ist, müsste q zwischen 0 und 1 liegen, was es dank seiner Definition nicht tun kann.

Damit gibt es einen Widerspruch zur Annahme, dass es kein maximales Element in $M_n gibt$.

Eine Formel zur Bestimmung des maximalen Elementes, wäre:

$l(n) = log_2(\frac{n}{q}))$.

Da man vorher definiert hat, dass $\frac{n}{q}$ eine Potenz auf der Basis 2 darstellt, gibt der Logarithmus zur Basis 2 dazu natürlich eine ganze, positive Zahl aus.

Somit können wir nun folgern, dass $l(a \cdot b) = log_2(\frac{a \cdot b}{q^2}) = log_2(a) + log_2(b) - log_2(q) - log_2(q) = log_2(\frac{a}{q}) + log_2(\frac{b}{q}) = l(a) + l(b)$

b) Da $q \cdot 2^p = n$, gilt dass $q = \frac{n}{2^p}$. Die hier zu prüfende Gleichung ist $p^2 = 2q^2$. Darum formen wir die korrekte Gleichung um und erhalten $2q^2 = \frac{2n^2}{2^{2p}}$. Da aber der Term $\frac{2n^2}{2^{2p}}$ für keine ganze positive Zahl ungleich Null zu p^2 werden kann, ist die Behauptung $p^2 = 2q^2$ widerlegt.

1.3

A:

Der kleinstmögliche Wert bei $(-\frac{1}{2})^m$ ist bei m=1, der kleinstmögliche Wert bei $-(\frac{3}{n})$ bei n=1 erreicht. Folglich gibt die summe der beiden das Infimum -0,5-3 = -3,5.

Der größtmögliche Wert bei $(-\frac{1}{2})^m$ ist bei m=2, der größtmögliche Wert bei $-(\frac{3}{n})$ bei n$\rightarrow \infty$ erreicht. Folglich ist die Summe der beiden das Supremum $\frac{1}{4}$.

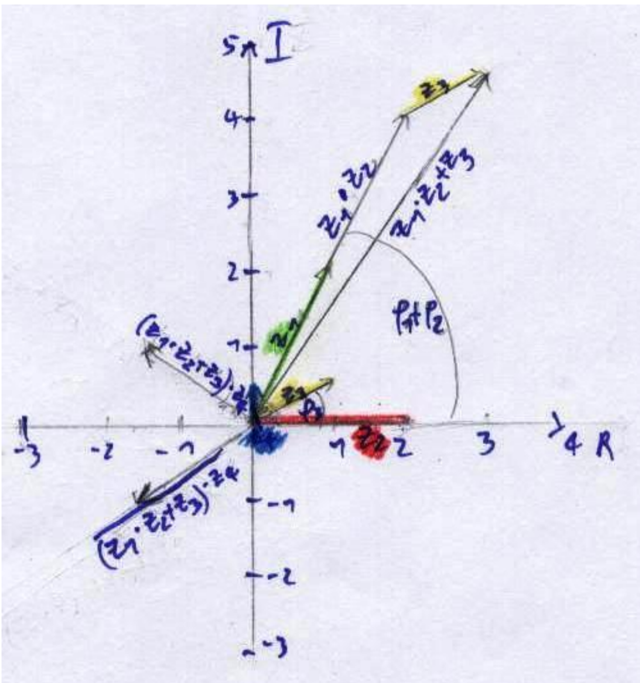
B:

Der kleinstmöglche Wert legt am Grenzwert der unteren Definitionsgrenze $x \rightarrow -1$. Zur Bestimmung dieses Grenzwertes forme man den Term folgendermaßen um: $\frac{1}{\frac{1}{x}+1}$. Da man per Definitionsgrenze sich diesem Grenzwert von rechts nähert, entspricht x einer minimal größeren Zahl als -1, weswegen $\frac{1}{x}$ auch minimal kleiner als -1 ist und so $\frac{1}{x}+1$ minimal kleiner als 0 ist. Folglich konvergiert dieser Grenzwert gegen $-\infty$. Da dies aber keine konkrete Zahl darstellt, existiert zu B kein Infimum.

Der größtmögliche Wert liegt an der oberen Definitionsgrenze $x \rightarrow \infty$. Indem man den Term $\frac{1}{\frac{1}{x}+1}$ für $x \rightarrow \infty$ benutzt, erreicht man den Grenzwert 1. Folglich ist das Supremum von B 1.

1.4

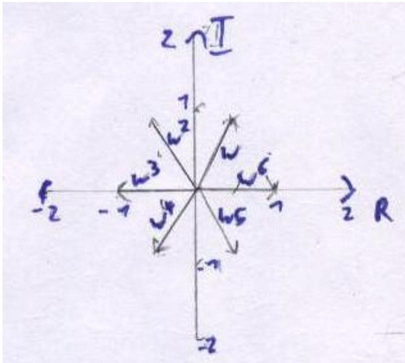
a) $z = \overline{(z_2 \cdot z_1 + z_3) \cdot z_4} = \overline{(2+4i+1+\frac{i}{2}) * \frac{i}{3}} = \overline{(3+4,5i) \cdot \frac{i}{3}} = \overline{-1,5+i} = -1,5-i$



Julian Bergmann
Florian Greiner
Timo Grosch
Julia Welsch

b)

$$
\begin{aligned}
w &= 0,5 + 0,5\sqrt{3}i \\
w^2 &= -0,5 + 0,5\sqrt{3}i \\
w^3 &= -1 \\
w^4 &= -0,5 - 0,5\sqrt{3}i \\
w^5 &= 0,5 - 0,5\sqrt{3}i \\
w^6 &= 1
\end{aligned}
$$



Vergleich mit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: beide verhalten sich periodisch in 6 Phasen.

1.5

a) *Kommutativ*:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = f(x)\lambda = (f\lambda)(x)$

Assoziativ:

$((f+g)+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + (g+h))(x)$

$(\delta(\lambda f))(x) = \delta\lambda f(x) = ((\delta\lambda)f)(x)$

Distributiv:

$(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$

$((\lambda+\delta)f)(x) = (\lambda+\delta)f(x) = \lambda f(x) + \delta f(x)$

Neutrales Element:

$((f + x_0)(x) = f(x) + x_0 = f(x)$

$(x_1 \cdot f)(x) = x_1 \cdot f(x) = f(x)$

Inverses Element:

$((f + x_{-1})(x) = f(x) + x_{-1}$, mit $x_{-1} = -f(x)$: $f(x) + x_{-1} = 0$

$(\delta_I \cdot \lambda \cdot f)(x) = \delta_I \cdot \lambda \cdot f(x)$, mit $\delta_I = \frac{1}{\lambda}$: $\delta_I \cdot \lambda \cdot f(x) = f(x)$

Damit ist dies ein $\mathbb{R} - Vektorraum$

b) V_1 ist ein Untervektorraum von V, falls $0 \in V_1$, $\forall u, w \in V_1 : u + w \in V_1$ und $\forall \lambda \in K \forall u \in V_1 : \lambda \cdot u \in V_1$.

Folgich ist V_1 ein Untervektorraum: da 0 in der Funktionsmenge enthalten sein kann; da, falls f(0)=f(1) und g(0)=g(1), folgt, dass g(0)+f(0) = g(1)+f(1); da λ*f(0)=λ*f(1) wäre und somit f(0)=f(1) weiterhin gelten würde.

Folglich ist V_2 kein Untervektorraum: da g(x)+f(x) nicht zwangsläufig mehr als 2 Nullstellen haben müssen, sofern sie voher mehr als 2 hatten.

Folglich ist V_3 ein Untervektorraum: da 0 in der Funktionsmenge enthalten sein kann; da, falls f an der Geraden x=0,5 gespiegelt wurde, folgt, dass f(0,5+x)=f(0,5-x) und g(0,5+x)=g(0,5-x) dazu führt, dass g(0,5+x)+f(x+0,5)=g(0,5-x)+f(x-0,5) ist; da λ*f(x+0,5) = λ*f(x-0,5), und somit f(x+0,5)=f(x-0,5) weiterhin gilt.

1.6

Ein Unterraum ist Affin, wenn er durch Verschiebung eines anderen Unterraums desselben Vektorraums mit einem ebenfalls aus dem Vektorraum stammenden Vektor entsteht.

Der hier genannte Unterraum $x+y+z = 1$ entsteht durch die Verschiebung des Unterraums $x + y + z = 0$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.